[†]Une grande variété de comportements dynamiques peut être représentée par des systèmes mathématiques bouclés d'apparence simpliste. L'image sur la page de garde montre comment un ordinateur peut être utilisé comme une sorte de microscope pour étudier de tels systèmes. Cette image révèle les dynamiques très riches impliquées par ces équations.
En choisissant différentes valeurs pour les deux paramètres ajustables du système, qui correspondent aux coordonnées des différents pixels de l'image, différentes valeurs pour la stabilité ont été obtenues. La mesure de stabilité qui a été utilisée ici est l'exposant de Lyapunov, qui permet de tester la robustesse du système à de petites perturbations. La valeur de stabilité est représentée par la couleur du pixel. L'exposant de Lyapunov permet de quantifier le taux de divergence moyen de deux trajectoires voisines le long de différentes directions dans l'espace de phase. Les exposants de Lyapunov de séries temporelles λ_i discrètes sont définis par les logarithmes des valeurs propres du plan tangent. Pour un système dynamique discret $x_{i+1} = f^n(x_i)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m)$, ce sont les valeurs propres de la matrice $\lim_{n\to\infty} [Jf^n(x)]^{\frac{1}{n}}$ où J est la matrice Jacobienne. Pour des trajectoires convergentes, les valeurs des exposants de Lyapunov sont négatives.
Les courbes très claires répresentent les régions où les paramètres choisis rendent le système très stable. Les dégradés de couleur correspondent à une diminution de cette stabilité jusqu'aux couleurs sombres qui sont les modes chaotiques. Les régions où se croisent les courbes très claires correspondent à des attracteurs dominants pour le comportement du système.
Cette représentation graphique permet de montrer une structure très riche qu'il est difficile de percevoir à la vue des équations.
Sources : http://www-uk2.hpl.hp.com/brims/art/gallery/lyap/.

À Agnès,
À mes parents,
À mes grand-parents,
À ma famille,
À mes amis...

Avant-Propos

LE TRAVAIL présenté dans ce mémoire a été effectué dans le cadre d'une allocation de recherche du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche au Laboratoire d'Automatique et de Mécanique Industrielles et Humaines (LAMIH) sous la direction conjointe de Monsieur le Professeur Thierry-Marie GUERRA et de Monsieur le Professeur Didier WILLAEYS.

Qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance et de ma profonde gratitude pour la liberté et la confiance qu'ils ont su m'accorder tout au long de ces années de recherche.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur Pierre BORNE et Monsieur le Professeur Laurent FOULLOY pour m'avoir fait l'honneur de rapporter ce mémoire.

Monsieur le Professeur Daniel JOLLY et Monsieur le Maître de Conférences Wilfrid PERRUQUETTI pour m'avoir fait l'honneur d'examiner ces travaux.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur Noël MALVACHE pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance.

Je tiens aussi à remercier les personnes suivantes, sans qui cette thèse n'aurait pas été aussi agréable :

- `%Ceci est du code \latex ;-)`
  `\begin{center}%`
  `\Ovalbox{\begin{minipage}{15cm}%`
  `\Huge Merci \‘a Thierry-Marie Guerra d’avoir bien voulu`
  `corriger cette th\‘ese sur autre chose que Word 5.1`
  `sous Mac ant\’ediluvien et de m’avoir persuad\’e`
  `tout au long de ces années que "Br\^ele" et`
  `"informaticien de brun" ne sont pas des compliments.`
  `\end{minipage}}%`
  `\end{center}`
- Monsieur Carlos GOMES LAMEIRAS, docteur de son état, qui me semble avoir perdu pas mal de neurones (et pas que cela `:-)`) lors de son passage chez nous,
- Monsieur Laurent VERMEIREN, qui, par son "optimisme légendaire", a su participer et nous donner confiance dans tous les travaux entrepris `:-)`, un grand merci pour son coup de main et son expérience sur le pendule inversé,

– Monsieur Olivier PETIT, ben, pour lequel je n'ai rien de méchant à dire, j'en suis confus, on dirait presque qu'il est parfait,
– Monsieur Khaled EL SANWAR, pour ne pas avoir posé de bombe dans notre labo le temps de ma thèse, pour ses arrivées matinales `:-)`, ses pauses café, son graveur, ses séances de tests approfondis des jeux de hasard,
– Monsieur Raphaël FRÈRE, guitariste, flutiste, artiste, papa, fumeur, fêtard, en retard, et par moment doctorant `:-)`,
– Monsieur François DELMOTTE, dit "Bouba, chercheur de MP3", pour son rire sans égal, sa folie quotidienne, ses délires pileux et autre "Quel Malheur",
– Monsieur Yann BLANCO, toujours éveillé, même si ce n'est pas flagrant à première vue, pour ses compétences sur les systèmes GAS,
– Monsieur Sébastien DELPRAT, pour son cassoulet crâmé, son caisson de basse, ses blagues du matin (chagrin) et ses compétences forcées sur les hacheurs `:-)`, même s'il est passé du coté obscur de la force, "un jour, forcé d'utiliser des programmes buggés tu seras".
– Monsieur Gino PAGANELLI, pour m'avoir fait perdre 2 heures le jour de sa soutenance de thèse, pour réparer son PC (ce jour là, il faisait moins l'malin !!!),
– Messieurs Éric MORGE et Alexandre NOËL, DEAs de choc, surtout en programmation C ("Heuuuu ça veut dire quoi `printf`"),
– Monsieur Philippe LOURO, l'homme "FAURE" qui mange plus vite que son ombre et qui bosse pendant les vacances `:-)`,
– Mademoiselle Hélène TIRMANT pour son rapport de DEA très utile et ses réflexions typiquement féminines `:-)`,(AÏE pas sur la tête...),
– Monsieur Jimmy LAUBER pour ses compétences en bricolage et en MP3 `:-)`,
– Messieurs Richard KAZMAREK et Jacques DELACROIX, pour leurs conseils avisés en matière d'électronique et dépannage *Amiga*,
– Messieurs Thierry POULAIN, Jean-Luc PETIT et Francis VANHUYSSE sans qui, `xdm`, `rsh` et autre `tar xvzf` ne serait que pure incantation druidique,
– Monsieur Pascal LEBRUN, pour sa maquette du pendule (si si j'insiste), ses bonnes affaires, et les p'tites discussions du samedi matin,
– Madame Marie-Claude ROSSILIOL, notre très chère secrétaire, pour les grands services rendus en matière d'administration et pour ses questions béotiennes concernant le nouveau monde implacable de l'informatique sous WINDOWS®,
– Monsieur Frédéric LEFÈBVRE pour ses conseils LyX/LaTeX, et autres bonnes urls,
– Monsieur Philippe POLET, pour ses critiques extrêmement constructives, ses bruits de couloirs (les couloirs s'en souviennent encore) et surtout ses jeux de mots du vendredi midi (pourris !!!),
– Monsieur Jean-Luc RAGO, "Toc-Toc Man", pour ses petites réflexions de la mort qui tuent la vie : "le mardi j'peux pas, j'ai piscine.... heu... le mercredi... ben j'vais courir...".

Je tiens aussi à remercier toute l'équipe de développeurs et d'utilisateurs très active du logiciel libre LyX (`http://www.lyx.org`) qui m'a permis de rédiger cette thèse.

Un grand merci à toutes les équipes de développement de GNU/Linux , ainsi qu'aux développeurs des logiciels :

- Tgif (http://bourbon.cs.umd.edu:8001/tgif),
- Barracuda (http://http://barracuda.linuxave.net/),
- Nedit (http://nedit.org),
- pstoedit (ftp://ftp.fdn.org/pub/CTAN/support/pstoedit/),
- jpeg2ps (ftp://ftp.fdn.org/pub/CTAN/support/jpeg2ps/),
- WindowMaker (http://www.windowmaker.org).

Une mention super spéciale pour Agnès, qui a supporté mes journées à "mi-temps" (12 heures par jour) au labo ainsi que mes délires Linuxo-antiwindozo-informatiques pendant ces années.

Contents

Introduction Générale 1

Références Personnelles 5

1. Commande Floue et Stabilité des modèles flous 7
1.1. Introduction . . . 8
1.2. Le régulateur flou . . . 9
1.2.1. Structure PID . . . 9
1.2.2. Régulateurs flous à base de modèles . . . 10
1.3. Modèle flou de type Takagi-Sugeno . . . 11
1.4. Stabilité des modèles flous . . . 14
1.4.1. Introduction . . . 14
1.4.2. Méthodes qualitatives et géométriques . . . 14
1.4.3. Méthodes entrée/sortie . . . 15
1.4.4. Approches basées sur des fonctions de Lyapunov . . . 16
1.4.4.1. Concepts de base de la théorie de Lyapunov . . . 16
1.4.4.2. Quelques fonctions de Lyapunov . . . 17
1.5. Stabilité et stabilisation quadratique des modèles flous Takagi-Sugeno (T-S) . . . 19
1.5.1. Stabilité . . . 19
1.5.2. Stabilisation d'un modèle flou T-S . . . 21
1.5.2.1. Concept PDC (Parallel Distributed Compensation) . . . 21
1.5.2.2. Conditions de stabilité du modèle bouclé . . . 22
1.5.3. Introduction aux outils LMIs . . . 23
1.5.4. Stabilité relâchée d'un modèle flou complet . . . 25
1.5.5. Stabilité du modèle flou T-S augmenté . . . 26
1.5.5.1. Observateur flou . . . 27
1.5.5.2. Cas des variables de prémisse mesurables . . . 28
1.5.5.3. Cas des variables de prémisse non mesurables . . . 29
1.5.6. Autres lois de commande . . . 31
1.5.6.1. Approche SSF . . . 31

1.5.6.2. Approche CDF (Compensation et Division pour modèles Flous) . . 32
1.6. Conclusion . . . 32

2. Stabilité et stabilisation quadratique pour modèles flous 33
2.1. Introduction . . . 34
2.2. Sur le passage d'un modèle non linéaire affine en la commande à un modèle flou de type TS . . . 34
2.2.1. Conditions d'obtention d'un modèle flou TS . . . 35
2.2.2. Influence sur la stabilisation . . . 38
2.3. Analyse de la stabilisation par loi de commande CDF . . . 40
2.3.1. Cas continu . . . 41
2.3.2. Cas discret . . . 42
2.4. Détermination de la loi de commande . . . 43
2.4.1. Cas continu . . . 43
2.4.2. Cas discret . . . 44
2.5. Principe de séparation appliqué à la loi de commande CDF . . . 47
2.5.1. Cas continu . . . 47
2.5.2. Cas discret . . . 49
2.6. Exemple . . . 50
2.7. Conclusion . . . 52

3. Stabilité et stabilisation non quadratique de modèles flous 53
3.1. Introduction . . . 54
3.2. Limites de l'approche quadratique . . . 55
3.2.1. Test d'existence de $P > 0$ . . . 55
3.2.2. Intérêt de l'utilisation de fonction de Lyapunov non quadratique . . . 56
3.3. Stabilité des modèles flous T-S continus . . . 58
3.3.1. Majoration de $\dot{V}(x(t), z(t))$ . . . 58
3.3.2. Analyse de la Stabilité et de la stabilisation . . . 60
3.4. Stabilité non quadratique des modèles flous T-S discrets . . . 61
3.4.1. Analyse de la stabilité : $1^{\text{ère}}$ approche . . . 61
3.4.1.1. Propriétés de l'approche non quadratique . . . 62
3.4.1.2. Exemple . . . 64
3.4.2. Analyse de la stabilité : $2^{\text{ème}}$ approche . . . 67
3.4.2.1. Exemple . . . 69
3.5. Stabilisation non quadratique . . . 70
3.5.1. $1^{\text{ère}}$ approche . . . 70
3.5.1.1. Stabilisation dans un cas particulier . . . 71
3.5.2. $2^{\text{ème}}$ approche . . . 72
3.6. Principe de séparation . . . 74
3.7. Exemples . . . 74
3.7.1. Exemple 1 . . . 75
3.7.2. Exemple 2 . . . 77
3.8. Conclusion . . . 79

4. Application à un procédé réel : le double pendule inversé **81**
4.1. Introduction . . . 82
4.2. Description de la plate forme . . . 83
4.2.1. Le simple pendule inversé . . . 83
4.2.2. Modifications techniques . . . 84
4.3. Modélisation du double pendule . . . 86
4.3.1. Modèle de connaisance . . . 86
4.3.2. Modèles simplifiés . . . 90
4.3.2.1. Modèle linéarisé . . . 90
4.3.2.2. Modèle flou TS . . . 91
4.4. Stabilisation du double pendule en simulation . . . 94
4.4.1. Calcul de l'observateur . . . 95
4.4.1.1. Observateur flou vs observateur linéaire . . . 95
4.4.1.2. Remarques sur la convergence des erreurs d'observation. . . . 96
4.4.2. Loi de commande linéaire . . . 99
4.4.3. Loi de commande PDC . . . 103
4.5. Stabilisation du double pendule en temps réel . . . 107
4.5.1. Loi de commande linéaire quadratique . . . 107
4.5.2. Loi de commande PDC . . . 109
4.6. Conclusion . . . 110

5. Perspectives **111**
5.1. Introduction . . . 111
5.2. Transformation des modèles T-S . . . 112
5.3. Exemple 1 . . . 112
5.4. Exemple 2 . . . 114

Conclusion Générale **117**

Références **119**

Table des figures **125**

Liste des tableaux **127**

Annexes **129**

A. Le double pendule inversé **131**
A.1. Modèle flou du double pendule inversé . . . 131

Introduction Générale

«Une station de métro c'est un endroit où les métros s'arrêtent, une station de taxis, c'est un endroit où les taxis s'arrêtent ; sur mon bureau j'ai une station de travail... »

Anonyme.

LES MÉTHODES classiques de commande ont prouvé leur efficacité dans de nombreux problèmes de régulation industrielle. Les méthodes de commandes avancées développées par d'éminents théoriciens (Régulateur adaptatif, Commande prédictive, Commande robuste...) permettent de répondre aux exigences d'un certain nombre de ces systèmes fortement non linéaires. C'est dans ce même créneau que les méthodes de modélisation et de commande floues se positionnent.

La mise en œuvre de régulateurs flous dans le cas de système monovariable ainsi que l'étude de la stabilité et de leurs performances sont des travaux déjà largement développés [Driankov *et al.*, 1993], [Guerra et Ouattara, 1993], [Lee, 1990a], [Lee, 1990b], [Melin et Vidolov, 1996], [Verbruggen *et al.*, 1999]. Par contre dans le cas des systèmes MIMO ou systèmes multivariables (Multiple Input, Multiple Output) les recherches sont beaucoup plus récentes [Raymond *et al.*, 1995], [Ma *et al.*, 1998], [Tanaka *et al.*, 1998]. La commande multivariable est longtemps restée le domaine de la commande linéaire classique avec l'utilisation d'un régulateur multivariable ou du principe de découplage. Ces méthodes sont basées sur une représentation mathématique précise du modèle du procédé et des notions de performance.

Comme dans le cas linéaire, il est nécessaire d'étudier la stabilité des boucles de régulation floue. Une représentation féconde de nombreux modèles non linéaires a été proposée par [Takagi et Sugeno, 1985]. Elle permet d'obtenir des modèles flous de systèmes où la partie conclusion utilise un formalisme d'état. Le développement d'une théorie à base de ce type de modèles flous (stabilité, stabilisation) s'appuie sur l'avancée des outils informatiques et mathématiques. Et plus précisément sur les techniques récentes basées sur les

programmes d'optimisation convexe d'un type particulier : les programmes semi-définis (SDP) [El Ghaoui, 1997] avec contraintes nommées "Linear Matrix Inequalities" (LMIs). Ils permettent de résoudre une large classe de problème d'analyse et de synthèse de lois de commande en automatique.

Pour les modèles flous, dans la plupart des cas, l'étude de la stabilité et de la stabilisation est faite par une approche utilisant une fonction de Lyapunov [Tanaka et Sugeno, 1992], [Wang *et al.*, 1996]. Des propriétés de stabilité et de stabilisation peuvent alors être déduites par la résolution d'un ensemble d'inégalités linéaires matricielles (LMIs). Par exemple, dans [Tanaka *et al.*, 1998], l'utilisation d'une loi de commande PDC (Parallel Distributed Compensation) permet d'élaborer des lois de commande par retour d'état flou.

Ce mémoire propose quelques travaux basés sur l'utilisation de la méthode de Lyapunov, pour effectuer la synthèse de lois de commande pour des modèles utilisant une représentation floue de type Takagi-Sugeno [Takagi et Sugeno, 1985]. La formulation LMI et son potentiel de résolution seront utilisés afin d'étendre les conditions de stabilité de [Tanaka *et al.*, 1998].

Le mémoire de thèse se décompose en cinq parties :

Commande floue et stabilité des modèles flous (Chapitre 1) : Ce chapitre présente rapidement la commande floue par l'intermédiaire des différents types de régulateur, le modèle flou de type Takagi-Sugeno [Takagi et Sugeno, 1985], [Sugeno et Kang, 1988], les principaux résultats sur l'étude de la stabilité et de la stabilisation des modèles flous. Ces résultats sont obtenus à l'aide de fonctions de Lyapunov quadratiques et aboutissent à des conditions conservatives. Les lois de commande utilisées classiquement sont du type PDC (Parallel Distributed Compensation) [Wang *et al.*, 1996] ou CDF (**C**ompensation and **D**ivision for **F**uzzy models) [Vermeiren, 1998]. Le chapitre rappelle également quelques résultats obtenus en utilisant un observateur flou. La résolution des équations obtenues faisant appel aux outils LMIs, un rappel des propriétés est également fait.

Stabilité et stabilisation quadratique pour modèles flous (Chapitre 2) : L'obtention d'un modèle flou de type Takagi Sugeno peut être réalisée à partir d'une identification de données réelles ou à partir des équations d'un modèle non linéaire. C'est cette dernière façon de faire qui est étudiée dans ce mémoire. La première partie présente alors quelques propriétés qui permettent de "passer" d'un modèle non linéaire affine en la commande à un modèle flou de type Takagi Sugeno. L'un des objectifs de ce "passage" est alors de minimiser le nombre de règles du modèle flou, ce nombre de règles ayant une très grande influence sur la conservativité des résultats obtenus en stabilité et/ou en stabilisation.

Dans un cas particulier de modèles flous il a été montré que l'utilisation d'une loi de type CDF (**C**ompensation et **D**ivision pour modèles **F**lous) permet de réduire le nombre de conditions mises en œuvre et donc de réduire la conservativité d'une loi de type PDC [Guerra et Vermeiren, 2000], [Vermeiren, 1998]. La deuxième partie du chapitre propose

alors d'étendre l'utilisation de la loi CDF dans le cas général des modèles flous TS. Cette extension se fait au prix de la formulation LMI, les conditions obtenues ne pouvant se mettre que sous une forme BMI (Bilinear Matrix Inequalities). L'obtention de résultats se fait alors en utilisant des relaxations qui utilisent des problèmes ayant une formulation de type LMI. Si le nombre de problèmes LMIs peut croître de façon exponentielle avec le nombre de règles, les travaux montrent que les résultats obtenus sont moins conservatifs que ceux obtenus avec une loi de commande PDC.

Stabilité et stabilisation non quadratique pour modèles flous discrets (Chapitre 3) : Très souvent, l'étude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes fait appel à des fonctions de Lyapunov quadratiques. La proposition faite dans ce troisième chapitre est l'utilisation d'une fonction de Lyapunov non quadratique. Dans le cas des modèles flous continus, une première approche est proposée dans [Blanco *et al.*, 1999]. Les travaux présentés dans ce mémoire sont eux focalisés sur le cas discret. Deux approches différentes sont utilisées pour obtenir des conditions de stabilité non quadratiques. La première approche correspond globalement à une extension du cas quadratique au cas non quadratique qui dans le cas de la stabilité d'un modèle flou TS discret se fait au prix du nombre de conditions (passant de r à r^2). Pour la stabilisation, en utilisant une loi PDC, cette première approche ne permet pas dans le cas général d'obtenir une formulation de type LMI des conditions obtenues. Une solution peut néanmoins être proposée avec l'utilisation d'une loi de type CDF dans un cas particulier de modèles flous TS discrets.

La deuxième approche mise en œuvre est basée sur une proposition de transformation matricielle proposée dans [de Oliveira *et al.*, 1999] et basée sur le complément de Schur. Elle permet alors de proposer une formulation LMI des conditions de stabilisation avec une loi PDC dans le cas général de modèles flous TS discrets. Toutes les propositions sont illustrées par des exemples qui permettent de montrer que les conditions obtenues sont moins conservatives que leurs équivalents quadratiques.

Application à un procédé réel : le double pendule inversé (Chapitre 4) : Ces différentes recherches ont pu être appliquées sur un procédé réel développé au sein du LAMIH (**L**aboratoire d'**A**utomatique et de **M**écanique **I**ndustrielles et **H**umaines). Cette application concerne la commande en simulation et en temps réel d'un système bien connu : le double pendule inversé. Cette plate-forme d'essais permet de valider diverses lois de commande basées sur les modèles classiques linéaires ou non-linéaires ou encore sur un modèle flou de type Takagi-Sugeno. Une plate-forme d'un simple pendule déjà existente [Lebrun, 1997], [Vermeiren, 1998] a permis de mettre en œuvre le double pendule après quelques modifications techniques.

Perspectives (Chapitre 5) : Le début du chapitre 2 montre des façons de transformer un système non linéaire affine en la commande en un modèle flou de type T-S, ainsi que l'importance de ces transformations sur la conservativité des résultats obtenus en stabilité et surtout en stabilisation. Le dernier chapitre propose alors des pistes permettant dans certains cas de réduire le nombre de règles d'un modèle flou ou d'un observateur flou en utilisation une mise sous une forme régulière du modèle non linéaire.

Références Personnelles

Conférences avec comité de lecture :

L. Vermeiren, T.M. Guerra, Y. Morère,
Control Laws for continuous TSK Fuzzy Models Using a Simultaneous Stabilization of a Collection of SIMO Models,
EUFIT 99, Aachen Allemagne, 1999.

L. Vermeiren, Y. Morère, T.M. Guerra,
Comparison of Different Fuzzy Control Laws of an Inverted Pendulum in Real Time,
EUFIT 99, Aachen Allemagne, 1999.

Y. Morère, T.M. Guerra, Laurent Vermeiren,
Stability and Stabilization of Discrete MIMO Fuzzy Models,
IAR-ICD'99 Workshop, Nancy, 1999.

Y. Morère, T.M. Guerra, Laurent Vermeiren, Anas Kamoun,
Non Quadratic Stability and Stabilization of Discrete Fuzzy Models,
ACIDCA'2000, IEEE, Monastir Tunisie, 2000.

Y. Morère, T.M. Guerra, Laurent Vermeiren,
Stabilité et Stabilisation Non Quadratique de Modèles Flous Discrets,
CIFA'2000, IEEE, Lille France, 2000.

Y. Morère et T.M. Guerra,
Stabilisation Quadratique de Modèles Flous par loi de commande CDF,
LFA'2000, La Rochelle, France, 2000.

Laurent Vermeiren, Hélène Tirmant, T.M. Guerra et Y. Morère,
Stabilisation d'un Double Pendule Inversé,
LFA'2000, La Rochelle, France, 2000.

Communications

Yann Morère,
Propositions de Lois de Commande pour Systèmes Multivariables Basés sur les Systèmes Flous,
Congrès des Doctorants, 26 janvier 2001, Valenciennes.

Blanco, Y., Guerra, T.M., Morère, Y., Peruquetti, W.,
Stabilité et stabilisation de modèles flous,
Journée GRAISYHM. Lille, France, Novembre 1999.

Chapter 1

Commande Floue et Stabilité des modèles flous

«Les deux principales choses qui ont été inventées à Berkeley sont le LSD et UNIX. Il est impossible que ceci soit une coïncidence.»

Jeremy S. Anderson.

CE CHAPITRE présente rapidement la commande floue par l'intermédiaire des différents types de régulateur, le modèle flou de type Takagi-Sugeno [Takagi et Sugeno, 1985], [Sugeno et Kang, 1988], l'étude de la stabilité et stabilisation des modèles flous complets et augmentés par la seconde méthode de Lyapunov [Tanaka *et al.*, 1996] et les outils LMIs [El Ghaoui, 1997]. Ces études conduisent à l'élaboration de conditions suffisantes de stabilité et stabilisation [Tanaka *et al.*, 1998] avec l'utilisation de lois de commande de type PDC (Parallel Distributed Compensation). Quelques autres lois de commande sont également traitées.

Sommaire

1.1. Introduction 8
1.2. Le régulateur flou 9
1.2.1. Structure PID 9
1.2.2. Régulateurs flous à base de modèles 10
1.3. Modèle flou de type Takagi-Sugeno 11
1.4. Stabilité des modèles flous 14
1.4.1. Introduction 14
1.4.2. Méthodes qualitatives et géométriques 14
1.4.3. Méthodes entrée/sortie 15

1.4.4. Approches basées sur des fonctions de Lyapunov 16
1.4.4.1. Concepts de base de la théorie de Lyapunov 16
1.4.4.2. Quelques fonctions de Lyapunov 17
1.5. Stabilité et stabilisation quadratique des modèles flous Takagi-Sugeno (T-S) 19
1.5.1. Stabilité 19
1.5.2. Stabilisation d'un modèle flou T-S 21
1.5.2.1. Concept PDC (Parallel Distributed Compensation) 21
1.5.2.2. Conditions de stabilité du modèle bouclé 22
1.5.3. Introduction aux outils LMIs 23
1.5.4. Stabilité relâchée d'un modèle flou complet 25
1.5.5. Stabilité du modèle flou T-S augmenté 26
1.5.5.1. Observateur flou 27
1.5.5.2. Cas des variables de prémisse mesurables 28
1.5.5.3. Cas des variables de prémisse non mesurables 29
1.5.6. Autres lois de commande 31
1.5.6.1. Approche SSF 31
1.5.6.2. Approche CDF (Compensation et Division pour modèles Flous) 32
1.6. Conclusion 32

1.1. Introduction

Les travaux de Lotfi Zadeh dans les années soixante [Zadeh, 1965] sur la théorie des ensembles flous et la logique floue à l'Université de Berkeley, ont jeté les bases de la commande floue actuelle. Ces travaux ont mis un certain temps avant d'être acceptés par la communauté de l'automatique et l'industrie. En effet la logique floue, de part ses aptitudes pluri-disciplinaires (utilisée dans des domaines aussi variés que la gestion de base de données, les systèmes experts, le traitement du signal, la classification de données, etc, sans oublier la commande de systèmes automatiques), s'est attirée les critiques des scientifiques de chacun des domaines respectifs qui se sentaient attaqués sur leurs positions [Verbruggen *et al.*, 1999]. Il faut attendre les années quatre-vingts dix pour que ces nouvelles théories soit acceptées et utilisées d'une manière générale.

En revanche, dans le domaine de la commande, la première application de la logique floue est réalisée par [Mandani, 1974] en 1974. Une application industrielle est développée par [Holmblad et Østergaard, 1982]. Cette théorie a été introduite en France par le professeur Arnold Kaufmann [Kaufmann, 1973]. Ces résultats sont confirmés par différentes équipes d'Europe de l'ouest, dont celles des professeurs D. Willaeys et N. Malvache à l'université de Valenciennes [Willaeys et Malvache, 1978]. Depuis 1987, date à laquelle la première application "grand public", le métro de Sendaï, utilisant la logique floue à été mise sur le marché [Miyamoto *et al.*, 1987], l'utilisation des techniques de commande floue n'a cessé de s'accroître.

Aujourd'hui, les différents travaux et publications récents semblent indiquer que les deux domaines d'application de la logique floue les plus importants sont :

– la conception de régulateurs pour des procédés difficilement modélisables,
– la conception de régulateurs non linéaires pour des procédés modélisables.

Dans le premier cas, la régulation floue se distingue de la régulation classique par le fait que le régulateur est synthétisé à partir de l'expertise des actions d'un opérateur humain. Au final, le régulateur obtenu possède au mieux les mêmes caractéristiques que le meilleur opérateur humain. Ce type de commande floue permet une bonne adéquation du régulateur au système, mais engendre de fortes non-linéarités et ne peut plus être représenté par un modèle "boîte blanche" par opposition au modèle "boîte noire". Ce dernier point est une des critiques avancées contre les systèmes à base de logique floue.

Dans le second cas, la structure non linéaire du régulateur permet d'améliorer les performances en terme de précision, de stabilité et de robustesse. Ce type de régulateur peut être appliqué à des modèles classiques linéaires ou non linéaires ou encore flous de type Takagi-Sugeno [Takagi et Sugeno, 1985]. Le travail présenté s'insérant complètement dans ce domaine, la première approche, ne sera discutée ici que de façon très succincte.

Le chapitre reprend quelques résultats existants sur la stabilité des boucles de régulation contenant un régulateur flou avant de se focaliser plus particulièrement sur les travaux concernant les modèles flous de Takagi Sugeno, se plaçant dans l'espace d'état. Les lois de commande rencontrées sur ce type de modèle sont également rappelées, ainsi que la notion d'observateur flou. L'obtention de ces dernières faisant appel à des inégalités linéaires matricielles (LMIs) [Boyd *et al.*, 1994], [Gahinet *et al.*, 1995], un rappel sur les différents outils LMIs nécessaires est effectué.

1.2. Le régulateur flou

La présentation des régulateurs flous du premier domaine, n'est pas reprise ici, la littérature concernant ce type de régulateurs étant importante aujourd'hui [Lee, 1990a; Lee, 1990b], [Driankov *et al.*, 1993], [Guerra et Ouattara, 1993], [Verbruggen *et al.*, 1999].

La grande différence avec son homologue classique est qu'elle n'a pas besoin d'un modèle mathématique explicite et précis du procédé à piloter. La plupart du temps elle se sert des connaissances des opérateurs humains pour mettre au point le régulateur.

La seconde spécificité de la commande floue est l'intégration facile de données subjectives dans le régulateur. Son utilisation est donc recommandée lorsque le système à piloter est mal connu, ou encore lorsque les variables du processus ne sont pas précises ou exprimées en langage naturel.

Beaucoup de régulateurs flous obtenus peuvent être vus comme des extensions dans le domaine non linéaire d'une version classique linéaire. Les paragraphes suivants reprennent de façon succincte différents types de régulateurs flous.

1.2.1. Structure PID

Dans ce cas, il s'agit d'une approche par retour de sortie, et le régulateur flou consiste en une fonction non linéaire reliant la commande du procédé aux entrées de type erreur, variation de l'erreur, etc.

Les différentes formes de commande par PID flou sont résumées dans les points suivants.

Régulateur flou proportionnel (RF-P) La loi de commande est proportionnelle à la valeur de l'erreur de commande. Les règles ont la forme suivante :

$$\text{SI } e(k) \text{ est } E \text{ ALORS } u(k) \text{ est } U$$

La loi de commande ressemble à celle d'un régulateur proportionnel classique avec un gain non linéaire :

$$u(k) = K_P(k)e(k)$$

Régulateur flou proportionnel dérivé (RF-PD) La loi de commande est obtenue grâce à l'erreur de commande et à sa dérivé première. Les règles ont la forme suivante :

$$\text{SI } e(k) \text{ est } E \text{ et } \Delta e(k) \text{ est } DE \text{ ALORS } u(k) \text{ est } U$$

La loi de commande du régulateur RF-PD est donnée par :

$$u(k) = K_P(k)e(k) + K_D(k)\left(e(k) - e(k-1)\right)$$

Régulateur flou proportionnel intégral (RF-PI) Les règles ont la forme suivante :

$$\text{SI } e(k) \text{ est } E \text{ et } \Delta e(k) \text{ est } DE \text{ ALORS } \Delta u(k) \text{ est } DU$$

La loi de commande s'apparente à celle d'un régulateur proportionnel intégral classique :

$$\Delta u(k) = K_P(k)\left(e(k) - e(k-1)\right) + K_I(k)$$

Régulateur flou proportionnel intégral et dérivé (RF-PID) La loi de commande est obtenue grâce à l'erreur de commande, son intégrale et sa dérivé première. Avec $\delta e(k) = \sum_{i=1}^{i=k-1} e(i)$, les règles ont la forme suivante :

$$\text{SI } e(k) \text{ est } E \text{ et } \Delta e(k) \text{ est } DE \text{ et } \delta e(k) \text{ est } SE \text{ ALORS } u(k) \text{ est } U$$

Des équivalences entre ces régulateurs flous et leurs versions linéaires ont été proposées par différents auteurs [Ying *et al.*, 1990], [Galichet et Foulloy, 1995].

1.2.2. Régulateurs flous à base de modèles

La régulation par PID flou peut être vue comme une approche heuristique indépendante du modèle. Le régulateur est conçu et réglé sans modèle explicite du procédé à piloter. Mais il est aussi possible d'utiliser ce type de commande lorsqu'un modèle est disponible. La commande floue est alors considérée comme un cas particulier de la commande non linéaire, où la logique floue sert à paramétrer les non linéarités.

Sans entrer dans le détail de ces différents types de commande, qui sont relativement éloignées des travaux de ce mémoire, on peut simplement noter que des essais ont été menés concernant :

- des lois de commande utilisant un modèle inverse [Driankov *et al.*, 1993], [Raymond *et al.*, 1995], avec les problèmes inhérents à ce type de lois de commande (conditions d'inversibilité,...)
- des lois de commande par modèle interne flou, utilisant un modèle flou et un régulateur basé sur un modèle inverse, avec les mêmes problèmes que les lois précédentes,
- des lois de commande prédictives [Nakamori, 1994], [Fisher *et al.*, 1997],
- des lois de commande adaptatives, par retour de sortie, directes et indirectes [Ouattara, 1996],
- des lois de commande adaptatives par retour d'état, directes et indirectes [Wang, 1994], [Boukezzoula *et al.*, 1998],
- des modes glissants flous [Palm et Driankov, 1997],
- ...

1.3. Modèle flou de type Takagi-Sugeno

Un système flou de type Takagi-Sugeno (T-S) [Takagi et Sugeno, 1985], utilise des règles écrites de la manière suivante :

$$R^{(l)} \ : \ \text{SI } x_1 \text{ est } A_1^{(l)} \text{ ET } \ \ldots \ x_n \text{ est } A_n^{(l)} \text{ ALORS } y = h^{(l)}(x) \tag{1.1}$$

Les fonctions de sortie $h^{(l)}(x)$, peuvent être en principe des fonctions arbitraires des entrées, mais d'une manière générale elles sont choisies telles qu'elles soient une combinaison linéaire des entrées1.1.

$$h^{(l)}(x) = l_1^{(l)} x_1 + \ldots + l_n^{(l)} x_n$$

Ce type de système est appelé un modèle Takagi-Sugeno linéaire, ou modèle Takagi-Sugeno homogène, ou encore si un terme constant est ajouté, on parle de modèle Takagi-Sugeno affine.

La particularité d'un modèle T-S est que la logique floue est seulement utilisée dans la partie prémisse des règles. La partie conclusion est décrite par des valeurs numériques. Dans ce cas la défuzzification fait partie intégrante du système d'inférence.

Ce type de modèle est aussi très intéressant pour la représentation de systèmes non linéaires tels que les systèmes mécaniques ou chaotiques. D'après [Sugeno et Kang, 1988], en utilisant les notations du tableau suivant,

R^i	$(i = 1, 2, \ldots r)$ la i^{eme} règle, r représente le nombre de règle
F_j^i	$(j = 1, 2, \ldots r)$ les sous ensembles flous des prémisses
$x(t) \in \mathbb{R}^n$	le vecteur d'état
$u(t) \in \mathbb{R}^m$	le vecteur des entrées
$y(t) \in \mathbb{R}^q$	le vecteur des sorties
$A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$	matrice d'état
$B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$	matrice des entrées
$C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$	matrice des sorties
$z(t) \in \mathbb{R}^p$	les variables des prémisses (variables d'état et/ou d'entrée)

Table 1.1.: Récapitulatif des notations d'un modèle T-S

les modèles flous T-S sont habituellement représentés sous les formes suivantes, où MFC et MFD indiquent respectivement les modèles flous continus et les modèles flous discrets :

<MFC>

Règle i du procédé :
Si $z_1(t)$ est F_1^i et $z_2(t)$ est F_2^i ... et $z_p(t)$ est F_p^i

$$\text{Alors} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, r \tag{1.2}$$

Chaque équation de sortie, formée d'une représentation d'état $A_i x(t) + B_i u(t)$, est nommée "sous-modèle". À chaque règle R^i est attribué un poids $w_i(z(t))$ qui dépend du degrés d'appartenance des variables de prémisses $z_j(t)$ aux sous ensembles flous F_j^i, et du choix du connecteur "ET" des prémisses.

Habituellement dans ce type de modèle le produit est choisi pour modéliser ce connecteur, d'où :

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^{p} F_j^i(z(t)), \; i = 1, 2, \ldots, r \text{ avec } \forall t, \; w_i(z(t)) \geq 0, \tag{1.3}$$

car les fonctions d'appartenance prennent leurs valeurs dans [0 1].

Les sorties finales du modèle flou sont inférées par une défuzzification barycentrique :

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))\{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))}, \; y(t) = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))} \tag{1.4}$$

en posant $h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))}$ avec $\forall t, \; \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) = 1$, elles peuvent être réécrites :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \; y(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) C_i x(t) \tag{1.5}$$

De la même manière, les modèles flous discrets sont définis par :

<MFD>

Règle i du procédé :

Si $z_1(t)$ est F_1^i et $z_2(t)$ est F_2^i ... et $z_p(t)$ est F_p^i

$$\text{Alors} \begin{cases} x(t+1) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, r \tag{1.6}$$

Et les sorties finales du modèle flou sont définies par :

$$x(t+1) = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))\{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))}, \; y(t) = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))} \tag{1.7}$$

en posant $h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))}$ avec $\forall t, \; \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) = 1$, elles peuvent être réécrites :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \; y(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) C_i x(t) \tag{1.8}$$

Remarque 1.3.1. Les systèmes flous implémentent des relations entrées/sorties non linéaires. Cette relation peut être réécrite sous la forme d'une somme pondérée de fonctions telle que :

$$f(x, \theta) = \sum_{i=1}^{M} \overbrace{g_i(x)}^{\text{partie conclusion}} \cdot \underbrace{w_i}_{\text{partie prémisse}}$$

Cette même représentation peut être vue comme la forme canonique de différentes méthodes d'approximation de fonctions non linéaires telles que les réseaux neuronaux, les fonctions à base radiale, les splines et les ondelettes. Sous certaines conditions, il est possible d'obtenir une correspondance exacte entre certains systèmes flous et ces représentations [Tanaka et Sugeno, 1990; Tanaka et Sugeno, 1992].

Ce type de représentation permet de traiter les problèmes multivariables et d'aborder l'étude de la stabilité grâce à la méthode de Lyapunov.

L'obtention de modèles flous sous cette forme peut être réalisée par différentes approches :

- obtenir un modèle flou directement à partir du modèle de connaissances [Tanaka *et al.*, 1998],
- obtenir un modèle flou par linéarisation autour de plusieurs points de fonctionnement [Tanaka et Sano, 1995], on se retrouve dans ce cas dans le cadre du multi modèle,
- obtenir un modèle flou par identification [Takagi et Sugeno, 1985], [Sugeno et Kang, 1988], [Ouattara, 1996].

Dans la plupart des cas, il devient de plus en plus difficile de justifier le mot "flou" pour ce type de modèles. Effectivement, si on peut considérer que l'approche historique consistait à utiliser des connaissances a priori sur la commande d'un système pour les intégrer dans un régulateur, dans le cas des modèles TS on ne retrouve pas cette philosophie. On peut simplement dire, que la représentation sous la forme d'un modèle flou de type TS est une "astuce" permettant une réécriture de modèles non linéaires en "reportant" les non linéarités dans la partie prémisse des règles. Ce point sera d'ailleurs discuté dans le chapitre 2.

1.4. Stabilité des modèles flous

1.4.1. Introduction

La stabilité des systèmes en boucle fermée est l'un des problèmes les plus importants de la théorie de la commande. La boucle de retour est la structure qui permet d'obtenir les objectifs de la commande en terme de stabilité, de poursuite et de réjection de perturbation. Une boucle de retour permet souvent de stabiliser un système instable en boucle ouverte, mais il est aussi possible de rendre instable en boucle fermée, un système stable en boucle ouverte.

L'analyse de la stabilité par la commande floue est un sujet difficile puisque les modèles considérés sont de nature non linéaire. Un certain nombre de travaux ont déjà été proposés en ce sens [Ollero *et al.*, 1995], [Driankov *et al.*, 1993], [Bülher, 1994], [Wang, 1994],[Melin et Vidolov, 1996] [Fuh et Tung, 1997], [Tanaka *et al.*, 1998].

La boucle de régulation floue étudiée est composée d'un régulateur flou non linéaire et d'un procédé lineaire ou non linéaire [Ollero *et al.*, 1999]. La boucle de commande est donc non linéaire et il est difficile d'obtenir des résultats généraux pour l'analyse et la mise en œuvre de loi de commande.

Il est important de noter que beaucoup de techniques d'analyse de stabilité sont basées sur des méthodes de stabilité locale autour d'un point d'équilibre tel que l'origine. C'est le cas des méthodes qualitatives et géométriques.

Dans le contexte de la stabilité générale, deux approches peuvent être utilisées :

- la théorie de stabilité entrée/sortie, qui traite des relations entre les sorties du système et ses entrées,
- la théorie de Lyapunov, qui fait référence aux propriétés de la représentation interne du système en terme de variable d'état et d'effet des perturbations résultantes du changement des conditions initiales.

D'un point du vue mathématique, la méthode entrée/sortie est basée sur les opérateurs et l'analyse fonctionnelle, alors que la méthode de Lyapunov utilise une formulation par les équations différentielles

1.4.2. Méthodes qualitatives et géométriques

Ces méthodes prennent leurs origines dans la théorie qualitative des systèmes non linéaires. Une des premières approches pour l'analyse de la stabilité des boucles de régulation floue est due à [Braee et Rutherford, 1979]. Elle utilise le plan de phase, et est donc réduite principalement aux systèmes du second ordre pour des problèmes évidents de représentation. [Ollero *et al.*, 1995] ont proposé une méthode d'interprétation géométrique dans l'espace d'état basée sur les vecteurs associés au modèle et au régulateur flou (Cf. figure 1.1). Les modèles utilisés sont décrits par $\frac{dx}{dt} = f(x) + b\Phi(x)$ où $\Phi(x)$ est une fonction non linéaire représentant le régulateur flou. Le comportement de ces modèles dépend de $f(x)$ et de $\Phi(x)$, la direction du vecteur associé au régulateur flou est liée à b et à son amplitude donnée par $b\Phi(x)$ (figure 1.1). Le plan de phase est alors découpé en fonction de la répartition des entrées du régulateur flou et une analyse qualitative permet

de caractériser le comportement du système en boucle fermée.

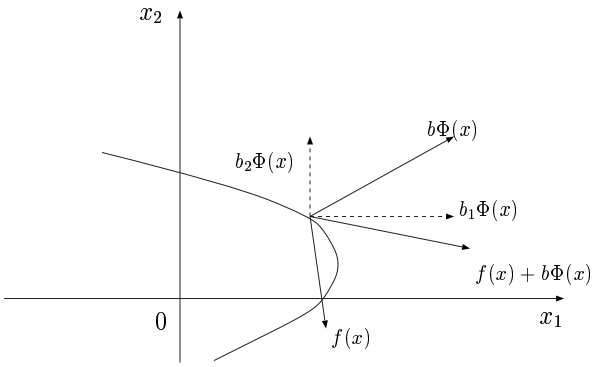


Figure 1.1. : Vecteurs associés au régulateur flou et au modèle

L'analyse des systèmes dynamiques non linéaires [Driankov *et al.*, 1993] fournit des outils utiles pour la formalisation du problème de stabilité. Ainsi des indices de stabilité et de robustesse peuvent être définis en utilisant ces concepts [Aracil *et al.*, 1993].

1.4.3. Méthodes entrée/sortie

Ces méthodes sont résumées de façon synthétique dans [Ollero *et al.*, 1999]. Le comportement d'un système bien régulé pourrait s'énoncer de la manière suivante (stabilité **BIBO**) : *pour des entrées bornées, les réponses du système sont bornées, de petits changements sur les entrées entraînent de petits changements sur les sorties.*

Dans les méthodes entrée/sortie, le système peut être représenté par un opérateur G qui produit la sortie $y(t)$ correspondante à l'entrée $x(t)$, ou par la relation G de toutes les paires $(y(t), x(t))$, où $y(t)$ est la sortie possible provoquée par l'entrée $x(t)$.

On retrouve alors les applications aux boucles de régulation contenant un régulateur flou des méthodes classiques basées sur ces approches.

Des résultats ont été obtenus basés sur le théorème des petits gains, aboutissant aux critères du cercle ou à l'aide de transformations sur la boucle fermée à l'utilisation du critère de conicité [Ollero *et al.*, 1993].

L'application du théorème sur la passivité a également été réalisée sur une structure de type RF-PI et avec des modèles de système linéaires invariants [Melin et Ruiz, 1997].

Les conditions obtenues sont évidemment suffisantes, mais la restriction principale qui est faite pour ces méthodes est l'utilisation pour les systèmes de modèles linéaires. Cette restriction peut parfois être "levée" si le modèle non linéaire peut être tranformé en une partie linéaire, et une partie non linéaire qui est alors regroupée avec le régulateur flou.

Il reste, comme le notent [Ollero *et al.*, 1999], que la détermination des blocs linéaires et non linéaires à obtenir en fonction du modèle non linéaire et du régulateur flou est un problème non résolu.

La deuxième grande approche pour l'analyse de la stabilité des modèles flous est l'approche basée sur les fonctions candidates de Lyapunov sur laquelle s'appuie les travaux de ce mémoire. Elle est présentée dans les paragraphes suivants.

1.4.4. Approches basées sur des fonctions de Lyapunov

Il peut être montré, que sous certaines conditions, la stabilité entrée/sortie et la stabilité interne sont équivalentes. Les travaux de [Willems, 1972] montrent entre les approches d'entrées/sorties et les approches dans l'espace d'état. Cependant ces deux approches posent le problème différemment et ne demandent pas les mêmes hypothèses sur le système dynamique. C'est pour cela qu'elles doivent être considérées comme des outils complémentaires.

1.4.4.1. Concepts de base de la théorie de Lyapunov

Dans la littérature il y a un certain nombre de définition de la stabilité de Lyapunov, la plus courante sera étudiée ici : la Stabilité Asymptotique Globale (GAS) du point d'équilibre 0 d'un système dynamique donné par les équations différentielles :

$$\dot{x} = f(x), \text{ avec } x(0) = x_0 \tag{1.9}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système et la fonction f telle que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ représente le système dynamique. La fonction f décrit les dynamiques du système et peut être modélisée par des équations algébriques classiques et/ou un modèle flou à base de connaissance. Les définitions suivantes peuvent être écrites [Borne *et al.*, 1993a] :

Définition 1.4.1. Considérons le système (1.9), le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable (GAS) si

$$\begin{aligned} &\forall t_0 \in \mathcal{T},\ \exists \delta(t_0) > 0 \text{ tel que } \forall x_0,\ \|x_0\| < \delta \Rightarrow x(t; t_0, x_0) \text{ défini } \forall t \geq t_0 \\ &\quad \text{et } \forall v > 0,\ \exists T(t_0, x_0; v) \text{ tel que } \forall t \geq t_0 + T,\ \|x(t; t_0, x_0)\| < v \qquad \text{(attractivité)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \in \mathcal{T},\ \exists \eta(\varepsilon, t_0) > 0 \text{ tel que } \|x_0\| < \eta \\ &\quad \text{et } \forall t \geq t_0 \Rightarrow \|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon \qquad \text{(stabilité)}. \end{aligned}$$

□

La définition suivante présente la fonction candidate de Lyapunov [Borne *et al.*, 1993a] :

Définition 1.4.2. Une fonction candidate de Lyapunov est une fonction $V(x)$ application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui possède les propriétés suivantes :

(i) $V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$, et $V(0) = 0$.

(ii) $\exists a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ fonctions scalaires continues monotones non décroissantes avec $a(0) = b(0) = 0$ telles que :

$$a(\|x\|) \leq V(x) \leq b(\|x\|).$$

(iii) Les courbes $V(x) = \text{Cte}$, appelées équipotentielles de Lyapunov définissent des domaines connexes emboités avec :

$$\mathcal{D}_1 = \{x \mid V(x_1) \leq c_1\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{x \mid V(x) \leq c_2\},$$
$$c_1 < c_2 \Rightarrow \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2.$$

(iv) La condition $\|x\| \to \infty$ implique $V(x) \to \infty$ (V est non bornée en rayon). □

La stabilité asymptotique globale peut être prouvée par les résultats suivants [de Larminat, 1993] :

En définissant la dérivée totale W de V le long des trajectoires du système :

$$W(x,t) \triangleq \frac{d}{dt}(V(x,t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x,t) + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

La décroissance monotone de $W(x,t)$ implique la stabilité. Les théorèmes suivants peuvent être démontrés :

Théorème 1.4.1. *[de Larminat, 1993] Si $W(x,t) \leq 0$ pour tout x et t, la solution d'équilibre à l'origine est stable au sens de Lyapunov.* □

Théorème 1.4.2. *[de Larminat, 1993] Si $W(x,t) \leq -\gamma(\|x\|)$, où γ est une fonction de classe K, la solution d'équilibre à l'origine est stable asympotiquement.* □

1.4.4.2. Quelques fonctions de Lyapunov

En théorie, n'importe quelle fonction candidate peut être fonction de Lyapunov. Dans le cas général non linéaire, il n'existe pas de méthode systématique pour trouver une fonction de Lyapunov. En pratique, afin de réduire la complexité, la fonction de Lyapunov est choisie parmi une famille de fonctions prédéfinies. Il s'agit de famille de fonctions paramétrées par des variables scalaires. La plus utilisée est la famille des fonctions de Lyapunov quadratiques.

Fonctions de Lyapunov quadratique Une fonction candidate classique est basée sur une forme quadratique du type :

$$V(x) = x^T P x, \quad P \in \mathbb{R}^{n \times n}, \; P = P^T > 0 \tag{1.10}$$

donc trouver une fonction de Lyapunov revient à trouver une matrice définie positive P. Ce type de fonctions de Lyapunov est très utilisé pour la stabilité de modèle flou de type Takagi-Sugeno comme nous le verrons dans le paragraphe 1.5.

La stabilité des systèmes de Lur'e peut par exemple être analysée en utilisant ce type de fonction. Ce type de système est décrit par les équations suivantes :

$$\sum_{CL} \begin{cases} \sum_L : \begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{cases} \\ \sum_F : \{ u = \Phi(y,t) \end{cases} \tag{1.11}$$

avec $\sum_L$ un modèle linéaire invariant et Φ une non linéarité dans la boucle de retour. Quand il s'agit d'un régulateur flou vérifiant une contrainte de type secteur, i.e. la propriété d'entrée/sortie suivante :

$$\forall t,\ \forall y,\ u = \Phi(y,t), \quad u^T Q u + 2u^T S y + y^T R y \leq 0. \tag{1.12}$$

où les matrices Q, S et R dépendent des paramètres de la structure de retour Φ. Le résultat principal est donné par [Marin et Titli, 1996] :

Théorème 1.4.3. *Considérons le système $\sum_{CL}$, s'il existe une matrice P définie positive telle que*

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - C^T R C + \epsilon I & PB - C^T\left(S^T + RD\right) \\ B^T P - \left(S^T + RD\right)^T C & -Q - D^T S^T - SD - D^T R D \end{bmatrix} \leq 0 \tag{1.13}$$

alors le point d'équilibre 0 est glabalement asymptotiquement stable. □

Le principal avantage du problème de Lur'e réside dans la condition d'entrée/sortie (1.12) peu contraignante. Cette méthode peut donc être appliquée à de nombreux systèmes tels que les réseaux neuronaux, les régulateurs de Mamdani [Mandani, 1974], les régulateurs de type Takagi-Sugeno [Takagi et Sugeno, 1985]. Mais la contre partie réside dans l'obtention de conditions de stabilité très conservatives.

Fonction de Lyapunov de Lur'e-Postnikov On trwouve encore d'autres résultats avec des fonctions de Lyapunov plus générales, du type Lur'e- Postnikov par exemple, qui possèdent la forme suivante :

$$V(x) = x^T P x + 2\int_0^y \Phi^T(\sigma) K d\sigma \tag{1.14}$$

avec K est une matrice constante (matrice des multiplicateurs de Popov) qui doit être déterminée. Le critère de Popov peut par exemple être démontré en utilisant de telles fonctions, et l'application à des régulateurs flous de type RF-PD, RF-PI peut-être trouvée dans [Melin et Vidolov, 1996]. Etant plus générales les résultats obtenues sont moins conservatifs, même si des hypothèses restrictives doivent être faites [Ollero *et al.*, 1999].

Fonction de Lyapunov multiquadratique Cette famille de fonction possède la forme suivante [Cao *et al.*, 1996] :

$$\text{Si } x \in \overline{L}_i \text{ alors } V(x) = x^T P_i x,\ i = 1, \ldots, N \tag{1.15}$$

où $\overline{L}_i$ est un ensemble "crisp" tel que $\cap \overline{L}_i = \emptyset$ et $\cup \overline{L}_i = \mathbb{R}^n$, P_i sont des matrices définies positives. Cette famille de fonction n'est pas continuellement dérivable.

L'utilisation des fonctions de Lyapunov multiquadratiques est intéressante car elle permet de réduire un problème de stabilité globale d'un modèle non linéaire à l'analyse indépendante de la stabilité locale de modèles linéaires. Mais le principal reproche que l'on peut faire à ce type d'étude, est que les lois de commande obtenues sont discontinues, ce qui amène à devoir vérifier a priori la non existence de cycles limites ou d'hyper surfaces de glissement [Ollero *et al.*, 1999].

Fonction de Lyapunov quadratique linéaire par morceau Un modèle linéaire par morceau possède la structure suivante :

$$\dot{x} = A_i x + a_i \quad \text{pour } x \in X_i$$

où X_i est une partition de l'espace d'état. Les dynamiques de chaque région sont décritent par des dynamiques linéaires. Dans ce contexte il est possible d'utiliser des fonctions de Lyapunov quadratiques linéaires par morceau définies par :

$$V(x) = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^T \bar{P}_i \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = x^T P_i x + 2q_i^T x + r_i \quad \text{pour } x \in X_i.$$

Ces fonctions sont plus générales que les fonctions quadratiques globales. D'après [Johansson, 1999], la recherche de ces fonctions peut être mise sous la forme d'un problème d'optimisation convexe. Cette analyse se base sur le fait que chaque matrice A_i représente les dynamiques du système dans l'espace d'état. Les conditions de stabilité sont données par :

$$\bar{P}_i - \bar{R}_i > 0, \quad \bar{A}_i^T \bar{P}_i + \bar{P}_i \bar{A}_i + \bar{S}_i < 0, \quad i = 1, \ldots, L,$$

où $\bar{R}_i$ et $\bar{S}_i$ sont des matrices qui expriment le fait que ces inégalités sont seulement nécessaires pour $x \in X_i$.

Les systèmes flous et plus particulièrement ceux de type Takagi-Sugeno peuvent être vus comme des systèmes linéaires par morceaux. L'analyse de la stabilité quadratique par morceaux peut donc être étendue aux systèmes flous T-S affines.

L'intérêt principal des méthodes basées sur l'approche de Lyapunov est de proposer une stabilité globale. Mais elles ne prennent pas en compte les critères de performance et de robustesse, ce qui peut être gênant dans certain cas.

1.5. Stabilité et stabilisation quadratique des modèles flous Takagi-Sugeno (T-S)

Ce dernier paragraphe reprend les principaux résultats obtenus sur les modèles flous T-S dans le cadre de l'utilisation d'une fonction de Lyapunov quadratique du type :$V(x) = x^T P x,\ P > 0$.

1.5.1. Stabilité

Le modèle flou est décrit par les équations (1.2) dans le cas continu et (1.6) dans le cas discret.

Les théorèmes de stabilité suivants sont basés sur l'approche de Lyapunov décrite dans le paragraphe (1.4.4). Ils décrivent des conditions suffisantes de stabilité des équations (1.5) et (1.8).

Théorème 1.5.1. *[Tanaka et Sugeno, 1992]* ***(MFC)*** *l'équilibre d'un modèle flou continu décrit par (1.5) est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice P commune définie positive telle que :*

$$A_i^T P + P A_i < 0,\ i = 1, 2, \ldots, r. \tag{1.16}$$

□

Théorème 1.5.2. *[Tanaka et Sugeno, 1992]* ***(MFD)*** *l'équilibre d'un modèle flou discret décrit par (1.8) est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice P commune définie positive telle que :*

$$A_i^T P A_i - P < 0,\ i = 1, 2, \ldots, r. \tag{1.17}$$

□

Les résultats obtenus sont forcément conservatifs, la partie prémisses, i.e. les $h_i(z(t))$, n'étant pas pris en compte dans le critère.

Quelques travaux ont essayé d'améliorer la conservativité de ces résultats en prenant en compte le support des ensembles flous des prémisses. Par exemple, [Kim *et al.*, 1995] considère un modèle flou discret (1.8) comme un système linéaire avec des incertitudes de modélisation. La conséquence est la réécriture du modèle flou en fonction d'une paire unique A_0, B_0 :

$$\forall i \in \{1, \ldots, r\},\ A_i = A_0 + \partial A_i,\ B_i = B_0 + \partial B_i$$

avec $\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) = 1$, le modèle peut être réécrit :

$$x(t+1) = \left(A_0 + \sum_{i=1}^{r} h_i(z)\, \partial A_i\right) x(t) + \left(B_0 + \sum_{i=1}^{r} h_i(z)\, \partial B_i\right) u(t). \tag{1.18}$$

Si le modèle (A_0, B_0) est supposé stable, il existe deux matrices $P > 0$ et $Q > 0$ telles que $A_0^T P A_0 - P < -Q$. Soient les matrices symétriques D_i définies par :

$$D_i = (A_0 + \partial A_i)^T P (A_0 + \partial A_i) - P = \partial A_i^T P \partial A_i + \partial A_i^T P A_0 + A_0^T P \partial A_i - Q$$

et en considérant chaque partie prémisse des règles R^i donnée par : Si $x(t)$ est F^i, i.e. : $x(t) \in Support(F^i)$, est équivalent à $\forall j \in \{1, \ldots, r\},\ x_j(t) \in Support\left(F_j^i\right)$, le théorème suivant peut être défini :

Théorème 1.5.3. *[Kim* et al.*, 1995] Le modèle flou T-S (1.6) autonome ($u = 0$) est stable si pour une matrice A_0 Hurwitz, il existe une matrice $Q > 0$ telle que, pour toutes les règles i, $x(t)^T D_i x(t) < 0$, pour tout $x(t) \neq 0,\ x(t) \in \{x(t) / x(t) \in Support(F^i)\}$.* □

Afin de déterminer la matrice Q qui vérifie le théorème 1.5.3, un algorithme basé sur la descente du gradient est proposé.

Enfin pour la suite, chaque sous-modèle est supposé vérifier les propriétés de commandabilité et d'observabilité définies ci-après [Feng *et al.*, 1997] :

Définition 1.5.1. Si les paires (A_i, B_i), $i = 1, 2, \ldots, r$ sont commandables, alors les modèles flous (1.5) et (1.8) sont *localement commandables*. □

Définition 1.5.2. Si les paires (A_i, C_i), $i = 1, 2, \ldots, r$ sont observables, alors les modèles flous (1.5) et (1.8) sont *localement observables*. □

1.5.2. Stabilisation d'un modèle flou T-S

L'une des premières idées de stabilisation de ces modèles a consisté à utiliser des retours d'état linéaires. Ces derniers ont vite été supplantés par une loi de commande qui permette de prendre en compte les non linéarités des modèles flous et connue sous le nom de PDC (Parallel Distributed Compensation) [Tanaka et Sano, 1994].

1.5.2.1. Concept PDC (Parallel Distributed Compensation)

Ce concept utilise une loi de commande linéaire pour chaque sous-modèle. Le résultat est non linéaire en général. L'idée est de créer un compensateur pour chaque règle du modèle flou. La procédure est la suivante :

- représentation floue T-S du système à commander,
- chaque règle de commande est conçue à partir de la règle du modèle flou précédement défini,
- un gain de commande par retour d'état constitue la partie conclusion de chaque sous modèle flou.

Le régulateur ainsi conçu partage la même base de règles que le modèle flou (pour sa partie prémisse).

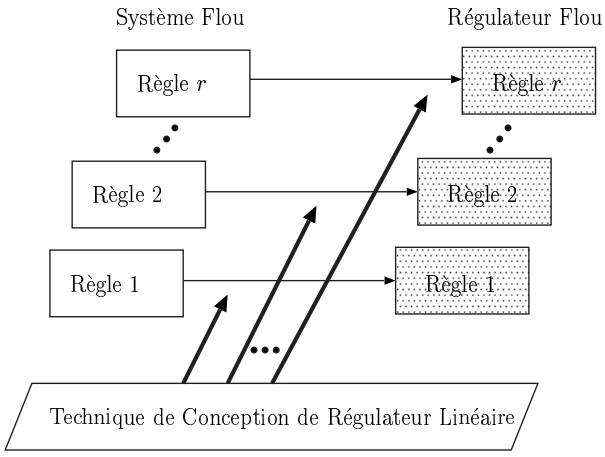


Figure 1.2. : Représentation du concept PDC [Wang *et al.*, 1996]

Le régulateur est alors défini de la façon suivante :

Règle i **:** Si $z_1(t)$ est F_1^i et $z_2(t)$ est F_2^i ... et $z_p(t)$ est F_p^i Alors $u(t) = -F_i x(t)\, i = 1, ..., r$.
Chaque règle i du régulateur possède le même poids $w_i(z(t))$ que celui de la règle i du modèle et possède une équation de sortie linéaire. La sortie finale du régulateur est inférée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t)) F_i x(t)}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))} \\ &= -\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) F_i x(t) \end{aligned} \tag{1.19}$$

La conception du régulateur revient à déterminer les gains locaux de contre réaction F_i dans la partie conclusion des règles de la loi de commande PDC.

1.5.2.2. Conditions de stabilité du modèle bouclé

En substituant (1.19) dans (1.5) et (1.8), les expressions obtenues sont les suivantes :
<MFC>

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} w_i(z(t)) w_j(z(t)) \{A_i - B_i F_j\} x(t)}{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} w_i(z(t)) w_j(z(t))} \\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z(t)) h_j(z(t)) \{A_i - B_i F_j\} x(t) \end{aligned} \tag{1.20}$$

<MFD>

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z(t)) h_j(z(t)) \{A_i - B_i F_j\} x(t) \tag{1.21}$$

En posant $G_{ij} = A_i - B_i F_j$ on peut encore écrire :
<MFC>

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) h_i(z(t)) G_{ii} x(t) \\ &+ 2 \cdot \sum_{i<j}^{r} h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left\{ \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right\} x(t) \end{aligned} \tag{1.22}$$

<MFD>

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) h_i(z(t)) G_{ii} x(t) \\ &+ 2 \cdot \sum_{i<j}^{r} h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left\{ \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right\} x(t) \end{aligned} \tag{1.23}$$

En appliquant les théorèmes 1.5.1 et 1.5.2 aux modèles décrits par (1.22) et (1.23), les conditions de stabilité pour les modèles flous complets s'énoncent de la manière suivante :

<MFC>

Théorème 1.5.4. *[Tanaka et Sano, 1994] Le système complet continu est asymptotiquement stable s'il existe une matrice $P > 0$ définie positive telle que :*

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0, \tag{1.24}$$

$$\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right)^T P + P\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right) \leq 0 \qquad i<j \tag{1.25}$$

pour tous les i et j, sauf les paires (i,j) telles que $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0$ avec $G_{ij} = A_i - B_i F_j$. □

<MFD>

Théorème 1.5.5. *[Tanaka et Sano, 1994] Le système complet discret est asymptotiquement stable s'il existe une matrice $P > 0$ définie positive telle que :*

$$G_{ii}^T P G_{ii} - P < 0, \tag{1.26}$$

$$\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right)^T P\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right) - P \leq 0 \qquad i<j \tag{1.27}$$

pour tous les i et j, sauf les paires (i,j) telles que $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0$ avec $G_{ij} = A_i - B_i F_j$. □

Ces deux théorèmes découlent directement des théorèmes 1.5.1 et 1.5.2.

La condition (1.25) dans le cas continu et (1.27) dans le cas discret, avec $i < j$, permet de réduire la conservativité des résultats puisqu'il n'est pas nécessaire d'avoir tous les sous-modèles croisés $A_i - B_i F_j$ stables.

Comme dans le cas précédent, la construction du régulateur se fait en trouvant les gains F_i des matrices de retour d'état. Il est alors possible d'utiliser une méthode par placement de pôle ou encore une synthèse quadratique.

Afin de trouver la matrice P commune et les gains F_i, il est possible d'opérer en deux étapes : la détermination des gains F_i en fonction de la méthode utilisée, puis vérification de l'existence d'une matrice P commune. Mais cette méthode reste assez empirique et ne garantit pas l'existence de la matrice P.

Il peut donc être intéressant de trouver simultanément les gains F_i et la matrice commune P, grâce aux outils issus de l'optimisation convexe et en particulier des Inégalités Linéaires Matricielles (LMIs).

1.5.3. Introduction aux outils LMIs

Un grand nombre de problème concernant les systèmes incertains peuvent se résoudre par l'intermédiaire de problèmes convexes d'un type particulier, les *programmes semidéfinis* (SDP) [El Ghaoui, 1997]. Ils sont aussi connus sous le nom de LMIs (Linear Matrix

Inequalities) en automatique, du fait des conditions engendrées par la formulation du problème SDP. L'intérêt principal des SDP est le calcul d'un minimum global en temps polynômial (par opposition aux techniques d'optimisation stochastiques qui elles n'ont pas de limite de temps de résolution), en utilisant la méthode des points intérieurs primale-duale [Nesterov et Nemirovski, 1994].

Une LMI est une inégalité matricielle de la forme [Tanaka et Sugeno, 1992] :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i > 0 \tag{1.28}$$

où $x^T(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est la variable recherchée et les matrices symétriques $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \ldots, m$ sont données et $F(x)$ est définie positive. La LMI représente une contrainte convexe sur x soit $x/F(x) > 0$. Cette LMI peut regrouper plusieurs contraintes convexes sur x en les regroupant dans une matrice bloc diagonale.

Il est alors possible d'exprimer les conditions des théorèmes 1.5.4 et 1.5.5 sous formes de LMIs et d'obtenir une résolution efficace grâce aux outils disponibles comme la "LMI Control Toolbox" de MATLAB [Gahinet *et al.*, 1995] ou encore la résolution de SDP par le logiciel Scilab [Nikoukhah *et al.*, 1995].

Si la mise sous la forme de LMIs est directe avec les équations des conditions de stabilité (1.16) et (1.17), ce n'est plus vrai avec les conditions (1.24), (1.25), (1.26) et (1.27) qui sont non linéaires en P et F_i. Les propriétés suivantes vont permettre de transformer le problème afin de pouvoir le mettre sous forme LMIs.

Changement de variable Cette transformation permet de rendre les équations linéaires en de nouvelles variables. Par exemple, pour le système décrit par les équations (1.24) et (1.25), il suffit d'opérer la changement de variables $X = P^{-1}$ et $M_i = F_i P^{-1}$. Les équations deviennent alors linéaires en X et M_i.

Lemme de Schur Ce lemme permet de transformer des non linéarités convexes en des LMIs.

Lemme 1.5.1. *[El Ghaoui, 1997] Soient $Q = Q^T$,$R = R^T$ et S des matrices de taille appropriée. La condition*

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \geq 0$$

est équivalente à

$$R \geq 0, Q - SR^{\dagger}S^T \geq 0, S(I - RR^{\dagger}) = 0,$$

où $R^{\dagger}$ dénote l'inverse de Moore-PenRose de R. □

Lemme de $\mathcal{S}$-procedure Ce lemme est une méthode permettant d'approximer un ensemble de contraintes quadratiques non convexes par une contrainte convexe.

Lemme 1.5.2. *[El Ghaoui, 1997] Soient $F_0, \ldots, F_p$, $\forall i,\ F_i \geq 0$, des fonctions quadratiques de la variable $\zeta \in \mathbb{R}^n$:*

$$F_i(\zeta) \triangleq \zeta^T T_i \zeta + 2u_i^T \zeta + v_i,\ i = 0, \ldots, p$$

où $T_i = T_i^T$. On considère la condition suivante sur $F_0, \ldots, F_p$:

$$F_0(\zeta) \geq 0 \text{ pout tout } \zeta \text{ tel que } F_i(\zeta) \ \geq 0, \quad i = 1, \ldots, p. \tag{1.29}$$

De manière évidente, si

$$\text{il existe } \tau_1 \geq 0, \ldots, \tau_p \geq 0 \text{ tels que } \begin{bmatrix} T_0 & u_0 \\ u_0^T & v_0 \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{p} \tau_i \begin{bmatrix} T_i & u_i \\ u_i^T & v_i \end{bmatrix} \geq 0,$$

alors (1.29) est vérifiée. Quand $p = 1$, la réciproque est vraie, à condition qu'il existe ζ_0 vérifiant $F_1(\zeta_0) > 0$. □

Le point suivant présente des conditions de stabilité issues de [Tanaka *et al.*, 1998], qui améliore la conservativité des résultats précédents.

1.5.4. Stabilité relâchée d'un modèle flou complet

Si le nombre de règles r est assez grand il peut être difficile de trouver la matrice P commune. L'idée est de relâcher les conditions de stabilité [Tanaka *et al.*, 1998] et est basée sur la propriété suivante :

$$\sum_{i=1}^{r} h_i^2(z(t)) - \frac{1}{r-1} \sum_{i<j}^{r} 2h_i(z(t))h_j(z(t)) \geq 0$$

où

$$\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) = 1,\ h_i(z(t)) \geq 0$$

vérifiée par :

$$\sum_{i=1}^{r} h_i^2(z(t)) - \frac{1}{r-1} \sum_{i<j}^{r} 2h_i(z(t))h_j(z(t)) = \frac{1}{r-1} \sum_{i<j}^{r} \{h_i(z(t)) - h_j(z(t))\}^2 \geq 0.$$

Les nouvelles conditions de stabilité sont définies par les théorèmes suivants :

<MFC>

Théorème 1.5.6. *[Tanaka et al., 1998] Le système complet continu est asymptotiquement stable s'il existe une matrice $P > 0$ définie positive, une matrice Q commune positive semi définie telles que :*

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + (s-1)Q < 0 \tag{1.30}$$

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right) - Q \leq 0 \qquad i < j \tag{1.31}$$

pour tous les i et j, sauf les paires (i, j) telles que $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0$ avec $G_{ij} = A_i - B_iF_j$, s le nombre de règles activées simultanément, tel que $1 < s \leq r$, avec r le nombre de règles. □

<MFD>

Théorème 1.5.7. *[Tanaka et al., 1998] Le système complet discret est asymptotiquement stable s'il existe une matrice $P > 0$ définie positive, une matrice Q commune positive semi définie telles que :*

$$G_{ii}^T P G_{ii} - P + (s-1)Q < 0 \tag{1.32}$$

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right)^T P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right) - P - Q \leq 0 \qquad i < j \tag{1.33}$$

pour tous les i et j, sauf les paires (i, j) telles que $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0$ avec $G_{ij} = A_i - B_iF_j$, s le nombre de règles activées simultanément, tel que $1 < s \leq r$, avec r le nombre de règles. □

Ces nouvelles conditions peuvent être exprimées sous la forme de LMIs.

Les approches considérées n'utilisent que la partie conclusion des règles. La conséquence directe est l'obtention de conditions suffisantes mais en aucun cas nécessaires. En effet, ne pas prendre en compte la partie prémisses qui contient les non linéarités en est la cause principale.

1.5.5. Stabilité du modèle flou T-S augmenté

Un observateur est nécessaire lorsque une partie de l'état n'est pas accessible. Le but étant d'obtenir une convergence asymptotique de l'erreur de prédiction d'état, i.e. $x(t) - \hat{x}(t) \to 0$ quand $t \to \infty$ où $\hat{x}(t)$ représente le vecteur d'état estimé par l'observateur. Le modèle flou T-S augmenté est composé d'un modèle flou, d'un régulateur flou et d'un observateur flou, figure 1.3.

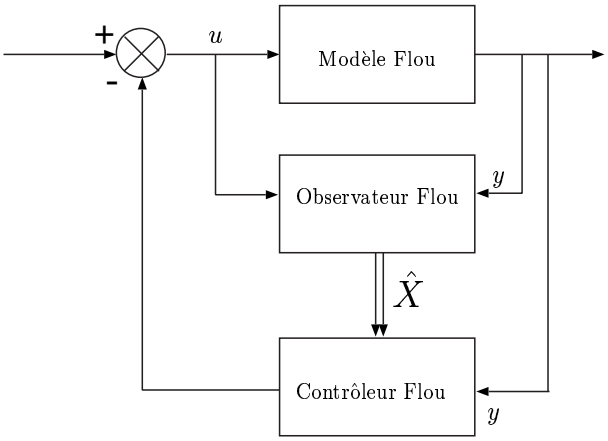


Figure 1.3. : Représentation du système augmenté

1.5.5.1. Observateur flou

Les règles R^i de l'observateur flou sont basées sur les règles du modèle flou utilisé. Si les modèles flous utilisés sont ceux décrits par (1.2) dans le cas continu, et par (1.6) dans le cas discret, les observateurs flous continus (OFC) et discrets (OFD) sont définis comme suit [Tanaka *et al.*, 1998] :
Dans le cas continu,

<OFC>

Règle i de l'observateur :
Si $z_1(t)$ est F_1^i et $z_2(t)$ est F_2^i ... et $z_p(t)$ est F_p^i

$$\text{Alors} \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_i\hat{x}(t) + B_iu(t) + K_i\left(y(t) - \hat{y}(t)\right) \\ \hat{y}(t) = C_i\hat{x}(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, r \tag{1.34}$$

avec les notations $h_i\left(\hat{z}\left(t\right)\right) = \frac{w_i(\hat{z}(t))}{\sum_{i=1}^{r} w_i(\hat{z}(t))}$et $\sum_{i=1}^{r} h_i\left(\hat{z}\left(t\right)\right) = 1$,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^{r} h_i\left(\hat{z}\left(t\right)\right)\left(A_i\hat{x}(t) + B_iu(t) + K_i\left(y(t) - \hat{y}(t)\right)\right) \\ \hat{y}(t) &= \sum_{i=1}^{r} h_i\left(\hat{z}\left(t\right)\right) C_i\hat{x}(t) \end{aligned} \tag{1.35}$$

Dans le cas discret,

<OFD>

Règle i de l'observateur :
Si $z_1(t)$ est F_1^i et $z_2(t)$ est F_2^i ... et $z_p(t)$ est F_p^i

$$\text{Alors} \begin{cases} \hat{x}(t+1) = A_i\hat{x}(t) + B_iu(t) + K_i(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_i\hat{x}(t) \end{cases}, \quad i = 1, 2, \ldots, r \tag{1.36}$$

avec les notations précédentes

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= \sum_{i=1}^{r} h_i\left(\hat{z}\left(t\right)\right)\left(A_i\hat{x}(t) + B_iu(t) + K_i\left(y(t) - \hat{y}(t)\right)\right) \\ \hat{y}(t) &= \sum_{i=1}^{r} h_i\left(\hat{z}\left(t\right)\right) C_i\hat{x}(t) \end{aligned} \tag{1.37}$$

où $i = 1 \ldots r$ est le nombre de règles, F_j^i sont les sous-ensembles flous du modèle du procédé, $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est le vecteur d'état estimé, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y(t) \in \mathbb{R}^q, \hat{y}(t) \in \mathbb{R}^q$ sont les vecteurs de sortie réels et estimés, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}, B_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C_i \in \mathbb{R}^{q\times n}$, K_i sont les matrices de gains d'observation, $\hat{z}_1(t) \sim \hat{z}_p(t)$ sont les variables de prémisse estimées.

Le calcul des poids de chaque règle s'effectue à partir des variables de prémisse. Deux cas sont à envisager :

– les variables de prémisse sont mesurables et il est possible de calculer les poids des règles de l'observateur en remplaçant $h_i(\hat{z}(t))$ par $h_i(z(t))$, [Feng *et al.*, 1997], [Ma *et al.*, 1998], [Tanaka et Sano, 1994], [Tanaka *et al.*, 1998], [Vermeiren, 1998],
– les variables de prémisse sont non mesurables, il faut donc les reconstruire et utiliser leurs estimées dans le calcul des poids des règles de l'observateur par $h_i(\hat{z}(t))$ [Tanaka *et al.*, 1998].

La stabilité du modèle augmenté complet sera donc étudiée suivant les deux cas précédents.

1.5.5.2. Cas des variables de prémisse mesurables

Le régulateur possède une loi de retour d'état linéaire donc la forme suivante :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))F_i\hat{x}(k) \tag{1.38}$$

et en remplaçant (1.35), (1.37) et (1.38) dans (1.2) et (1.6) le système augmenté est représenté par :

<MFC>

$$\begin{aligned}\dot{x}_a(t) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z(t))h_j(z(t))\cdot G_{ij}x_a(t)\\ &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))h_i(z(t))\cdot G_{ii}x_a(t)\\ &\quad +2\sum_{i<j}^{r} h_i(z(t))h_i(z(t))\cdot \frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}x_a(t)\end{aligned} \tag{1.39}$$

<MFD>

$$\begin{aligned}\dot{x}_a(t+1) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z(t))h_j(z(t))\cdot G_{ij}x_a(t)\\ &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))h_i(z(t))\cdot G_{ii}x_a(t)\\ &\quad +2\sum_{i<j}^{r} h_i(z(t))h_i(z(t))\cdot \frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}x_a(t)\end{aligned} \tag{1.40}$$

Avec :

$$\begin{aligned}x_a(t) &= \begin{bmatrix} x(t)\\ \tilde{x}(t)\end{bmatrix},\ \tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)\\ G_{ij} &= \begin{bmatrix} A_i - B_iF_j & B_iF_j\\ 0 & A_i - K_iC_j\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{1.41}$$

Dans ce cas, [Ma *et al.*, 1998] ont proposé un théorème de séparation pour le calcul des gains de commande et d'observation. Dans cette partie le modèle flou utilisé est celui décrit par (1.39) et le théorème suivant est défini :

Théorème 1.5.8. *[Ma et al., 1998] S'il existe deux fonctions scalaires* $V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et* $\tilde{V}(\tilde{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et des nombres réels positifs* γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$, $\tilde{\gamma}_3$ *et* $\tilde{\gamma}_4$ *tels que :*

(i) $\gamma_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq \gamma_2 \|x\|^2$, $\tilde{\gamma}_1 \|\tilde{x}\|^2 \leq \tilde{V}(x) \leq \tilde{\gamma}_2 \|\tilde{x}\|^2$, *avec* $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$,

(ii) $\frac{\partial V(x)}{\partial x} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} h_i(x) h_j(x) (A_i - B_i F_j) x \leq -\gamma_3 \|x\|^2$,
$\frac{\partial \tilde{V}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} h_i(x) h_j(x) (A_i - K_j C_i) \tilde{x} \leq -\tilde{\gamma}_3 \|\tilde{x}\|^2$,

(iii) $\left\| \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\| \leq \gamma_4 \|x\|, \left\| \frac{\partial \tilde{V}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \right\| \leq \tilde{\gamma}_4 \|\tilde{x}\|$,

alors le modèle complet (1.39) est globalement uniformément asymptotiquement stable. □

En choisissant la fonction $V(x)$, respectivement $\tilde{V}(\tilde{x})$, telle qu'elle verifie les conditions de stabilité de la loi de commande, respectivement telle qu'elle verifie les conditions de stabilité de l'observateur, les conditions du théorème 1.5.8 sont vérifiées.

Il est donc possible dans le cas de variables de prémisse mesurables, de déterminer séparement les gains de commande F_i et les gains de l'observateur K_i.

Un théorème analogue existe dans le cas discret [Ma *et al.*, 1998].

1.5.5.3. Cas des variables de prémisse non mesurables

Le régulateur flou utilise les variables reconstruites et sa structure est modifiée par rapport à (1.38) et s'écrit :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{r} h_i(\hat{z}(t)) F_i \hat{x}(k) \tag{1.42}$$

et en remplaçant (1.35), (1.37) et (1.42) dans (1.2) et (1.6) le système augmenté est représenté par :

<MFC>

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1s}^{r} \sum_{=1}^{r} h_i(z(t)) h_j(\hat{z}(t)) h_s(\hat{z}(t)) G_{ijs} x_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} h_i(z(t)) h_j(\hat{z}(t)) h_j(\hat{z}(t)) G_{ijj} x_a(t) \\ &\quad +2 \cdot \sum_{i=1}^{r} \sum_{j<s}^{r} h_i(z(t)) h_j(\hat{z}(t)) h_s(\hat{z}(t)) \cdot \frac{G_{ijs} + G_{isj}}{2} x_a(t) \end{aligned} \tag{1.43}$$

<MFD>

$$\begin{aligned} x_a(t+1) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1s}^{r}\sum_{=1}^{r} h_i(z(t))h_j(\hat{z}(t))h_s(\hat{z}(t))G_{ijs}x_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z(t))h_j(\hat{z}(t))h_j(\hat{z}(t))G_{ijj}x_a(t) \\ &\quad +2\cdot\sum_{i=1}^{r}\sum_{j<s}^{r} h_i(z(t))h_j(\hat{z}(t))h_s(\hat{z}(t))\cdot\frac{G_{ijs}+G_{isj}}{2}x_a(t) \end{aligned} \quad (1.44)$$

Avec :

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} \\ \tilde{x}(t) &= x(t)-\hat{x}(t) \\ G_{ijs} &= \begin{bmatrix} A_i - B_iF_s & B_iF_s \\ S^1_{ijs} & S^2_{ijs} \end{bmatrix} \\ S^1_{ijs} &= (A_i - A_j) - (B_i - B_j)F_s + K_j(C_s - C_i) \\ S^2_{ijs} &= A_j - K_jC_s + (B_i - B_j)F_s \end{aligned} \quad (1.45)$$

Par extension des théorèmes 1.5.5 et 1.5.4, les théorèmes suivants sont obtenus :

<MFC>

Théorème 1.5.9. *[Tanaka et al., 1998] Le système augmenté continu est asymptotiquement stable s'il existe une matrice $P > 0$ définie positive :*

$$G_{ijj}^T P + PG_{ijj} < 0 \quad (1.46)$$

$$\left(\frac{G_{ijs}+G_{isj}}{2}\right)^T P + P\left(\frac{G_{ijs}+G_{isj}}{2}\right) < 0 \qquad i < s \quad (1.47)$$

pour tous les i, j et s, sauf les paires (i,j,s) telles que $h_i(z(t))h_j(\hat{z}(t))h_s(\hat{z}(t)) = 0$. □

<MFD>

Théorème 1.5.10. *[Tanaka et al., 1998] Le système complet discret est asymptotiquement stable s'il existe une matrice $P > 0$ définie positive :*

$$G_{ijj}^T PG_{ijj} - P < 0 \quad (1.48)$$

$$\left(\frac{G_{ijs}+G_{isj}}{2}\right)^T P\left(\frac{G_{ijs}+G_{isj}}{2}\right) - P < 0 \qquad i < s \quad (1.49)$$

pour tous les i, j et s, sauf les paires (i,j,s) telles que $h_i(z(t))h_j(\hat{z}(t))h_s(\hat{z}(t)) = 0$. □

Dans ce cas, le principe de séparation ainsi que les conditions relâchées ne sont plus utilisables, il est donc nécessaire de calculer les matrices de gains de commande et d'observation par itérations successives.

1.5.6. Autres lois de commande

La plupart des approches qui traitent de la stabilité des boucles de régulation floue, sont basées sur une PDC (Parallel Distributed Compensation). Une autre approche basée sur les travaux de [Petersen, 1987] sur la stabilisation simultanée de systèmes linéaires est décrite dans [Vermeiren, 1998]. Elle consiste à essayer d'éviter l'utilisation des sous modèles croisés pour des modèles flous MIMO continus.

1.5.6.1. Approche SSF

Cette première approche nommée SSF (Stabilisation Simultanée pour modèles Flous) [Vermeiren, 1998] est basée sur les travaux de [Petersen, 1987] concernant la stabilisation simultanée d'une famille de modèles linéaires MIMO en utilisant une loi de commande par retour d'état non linéaire.

Le principal théorème est la suivant :

Théorème 1.5.11. *[Guerra et Vermeiren, 2000] Soit un modèle flou décrit en (1.2) de type SIMO. Supposons qu'il existe une matrice $P > 0$ et un réel $\alpha > 0$ tels que :*

$$\forall i \in \{1, \ldots, r\}, \exists Q_i > 0, F_i, \quad A_i^T P + P A_i - P B_i F_i - F_i^T B_i^T P + Q_i \leq 0 \tag{1.50}$$

$$\forall j \quad Q_i + P B_i F_j + F_j^T B_j^T P > \alpha I \tag{1.51}$$

alors la loi de commande $u(x) = g_1(x) + g_2(x)$ avec :

$$g_1(x) = \min_r \left(0, \frac{x^T Q x - \alpha \|x\|^2}{2 B_i^T P x} - F_i x \right) \quad \text{pour } i \text{ tel que } B_i^T P x > 0 \tag{1.52}$$

$$g_2(x) = \max_r \left(0, \frac{x^T Q x - \alpha \|x\|^2}{2 B_i^T P x} - F_i x \right) \quad \text{pour } i \text{ tel que } B_i^T P x < 0 \tag{1.53}$$

rend le modèle en boucle fermée globalement asymptotiquement stable. □

La preuve de ce théorème utilise l'approche de Lyapunov par fonction quadratique.

Les équations (1.50) et (1.51) peuvent être mises sous la forme de LMIs et après avoir effectuer le changement de variable classique $X = P^{-1}$, $M_i = F_i P^{-1}$ et $Y_i = P^{-1} Q_i P^{-1}$ et avec l'utilisation du lemme de Schur (1.5.1).

Le problème revient donc à trouver $\alpha > 0$, $X > 0$, $Y_i \geq 0$ et M_i tels que :

$$X A_i^T + A_i X - B_i M_i - M_i^T B_i^T + Y_i \leq 0 \tag{1.54}$$

$$\begin{bmatrix} Y_i + B_i M_j + M_j^T B_i^T & X \\ X & \frac{1}{\alpha} I \end{bmatrix} > 0 \tag{1.55}$$

Cette approche est intéressante car il n'y a pas de restriction sur les modèles SIMO utilisés. Mais du fait de la stabilisation simultanée de tous les sous modèles, les conditions de stabilité sont certainement plus conservatives que celles trouvées dans [Tanaka *et al.*, 1998].

L'utilisation d'un observateur flou avec variables de prémisse mesurables a aussi été étudiée [Vermeiren, 1998] et a conduit à la définition d'un principe de séparation dans le cadre de cette loi de commande.

1.5.6.2. Approche CDF (Compensation et Division pour modèles Flous)

Cette approche se base également sur une division, elle se base sur le résultat suivant :

Théorème 1.5.12. *[Guerra et Vermeiren, 1998] Soit un modèle flou décrit en (1.2). Supposons qu'il existe une matrice $P > 0$ et des vecteurs F_i, tels que : $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$ les équations suivantes soient satisfaites :*

$$A_i^T P + P A_i - P B_i F_i - F_i^T B_i^T P \leq 0. \tag{1.56}$$

Supposons que si $\exists x_0 \neq 0$ tel que $\sum_{i=1}^{r} h_i(z)\, B_i^T P x_0 = 0$ alors

$$\forall i \text{ tel que } h_i(z) \neq 0 \; : \; x_0^T P B_i F_i x_0 = 0 \tag{1.57}$$

alors il existe une loi de commande non linéaire continue qui rend le modèle flou globalement asymptotiquement stable. □

On peut alors se rendre compte, qu'une façon de vérifier la dernière condition est que les matrices d'entrée des sous-modèles vérifient une propriété de dépendance linéaire du type :

$\forall i \in \{1, \ldots, r\}$, $\exists k_i > 0$ tels que $B_i = k_i B$. Une loi de commande possible est alors :

$$u(t) = -\frac{\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\, k_i F_i}{\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\, k_i} x(t) \tag{1.58}$$

Il est alors important de remarquer que le système bouclé par l'état s'écrit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) \left(A_i - B_i F_i\right) x(t)$$

Il n'y a donc que r LMIs à vérifier au lieu de $\frac{r(r+1)}{2}$ce qui permet donc de réduire la conservativité des résulats.

1.6. Conclusion

Ce premier chapitre a rappelé les différents types de régulateurs flous que l'on rencontre usuellement. D'une façon générale, la plupart de ces régulateurs peuvent être vus comme une extension de régulateurs linéaires dans le domaine non linéaire, PID, modèle interne,...

Les résultats concernant la stabilité et la stabilisation de boucles de régulation floue commencent à être légion. Les approches basées sur les méthodes entrée/sortie ont été discutées rapidement, avant de focaliser plus particulièrement sur les approches basées sur des fonctions de Lyapunov. Plusieurs fonctions sont présentées, dont certaines ont été appliquées. Néanmoins dans le contexte des modèles flous de type Takagi Sugeno (T-S) les fonctions de Lyapunov les plus couramment utilisées sont de type quadratiques.

Les différents résultats obtenus avec de telles fonctions, en stabilité, stabilisation avec et sans observateurs ont alors été rappelés. Enfin, plusieurs types de lois de commande pour des modèles T-S ont également été explicités.

Chapter 2

Stabilité et stabilisation quadratique pour modèles flous

«On fait la science avec des faits, comme on fait une maison avec des pierres : mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison.»

Henri Poincaré, mathématicien français .

LA PREMIÈRE partie de ce chapitre présente une méthode de transformation de modèle non linéaire en modèle flou de type Takagi-Sugeno en essayant de minimiser le nombre de règles. Ensuite, comme le chapitre précédent, l'étude se portera sur la stabilité et la stabilisation des modèles flous de types Takagi-Sugeno comprenant un régulateur flou et/ou un observateur flou. Mais la principale différence avec les études déjà existante [Tanaka *et al.*, 1998] réside dans l'utilisation d'une loi de commande CDF (**C**ompensation et **D**ivision pour modèles **F**lous) pour la stabilisation. Cette étude, qui comprend les cas continu et discret, permet de décrire de nouvelles conditions de stabilité et de stabilisation moins conservatives. Un principe de séparation est aussi disponible.

Sommaire

2.1. Introduction 34
2.2. Sur le passage d'un modèle non linéaire affine en la commande à un modèle flou de type TS 34
2.2.1. Conditions d'obtention d'un modèle flou TS 35
2.2.2. Influence sur la stabilisation 38
2.3. Analyse de la stabilisation par loi de commande CDF . . . 40
2.3.1. Cas continu 41

2.3.2. Cas discret 42
2.4. Détermination de la loi de commande 43
2.4.1. Cas continu 43
2.4.2. Cas discret 44
2.5. Principe de séparation appliqué à la loi de commande CDF 47
2.5.1. Cas continu 47
2.5.2. Cas discret 49
2.6. Exemple 50
2.7. Conclusion 52

2.1. Introduction

Ce chapitre traite de la stabilisation de modèles flous de type Takagi-Sugeno dans le cadre de l'utilisation d'une loi de commande CDF (Compensation et Division pour modèles Flous). Dans la plupart des travaux qui utilisent les modèles flous T-S [Kim *et al.*, 1995; Ma *et al.*, 1998; Takagi et Sugeno, 1985; Tanaka et Sugeno, 1992; Tanaka et Sano, 1993; Tanaka, 1995; Tanaka *et al.*, 1996; Tanaka *et al.*, 1998; Zhao *et al.*, 1996], les lois de commandes induites sont basées sur un retour d'état appelé PDC (Parallel Distributed Compensation) [Wang *et al.*, 1996]. L'analyse de la stabilité est faite par approche de Lyapunov [Tanaka et Sugeno, 1992; Tanaka *et al.*, 1998; Zhao *et al.*, 1996] en utilisant une fonction de Lyapunov quadratique qui produit des conditions suffisantes de stabilité. Quelques travaux proposent l'utilisation de fonctions non quadratiques dans des cas particuliers de systèmes continus [Blanco *et al.*, 1999], ou discrets (Cf. Chapitre 3).

La première partie montre comment il est possible de transformer les systèmes non linéaires affines en la commande en modèle flous de type T-S. Elle montre également que les transformations utilisées influent sur le nombre de règles obtenues, ce qui peut se révéler capital pour déterminer une loi de commande stabilisante. La seconde partie présente la stabilisation par loi de commande CDF [Vermeiren, 1998] des modèles flous T-S. Cette approche, qui utilise une fonction de Lyapunov quadratique, permet d'étendre les conditions de stabilisation données dans [Tanaka *et al.*, 1998]. Une méthode de détermination de la loi de commande est présentée ainsi qu'un principe de séparation. Enfin un exemple est traité afin de montrer l'efficacité de la méthode proposée.

2.2. Sur le passage d'un modèle non linéaire affine en la commande à un modèle flou de type TS

Le but de ce paragraphe est de proposer des transformations permettant le passage d'un modèle non linéaire affine en la commande de la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))\,u(t) \quad \text{(en continu)} \tag{2.1}$$

ou

$$x(t+1) = f(x(t)) + g(x(t))\,u(t) \quad \text{(en discret)} \tag{2.2}$$

à un modèle flou de type Takagi-Sugeno (TS). Dans toute la suite, seul le cas continu est pris en compte, le cas discret se traitant en tout point de la même manière.

Comme il sera montré dans la suite, ce passage n'est pas unique et les différentes manières de réaliser cette transformation peuvent amener à des modèles ayant un nombre de règles variable et/ou des matrices plus ou moins remplies. Il est alors évident que l'influence de cette transformation sur les conditions de stabilité sera très importante, si on pense par exemple, qu'une transformation particulière peut réduire le nombre de règles, donc, dans le contexte d'une recherche de loi de commande, le nombre de conditions LMIs à vérifier.

2.2.1. Conditions d'obtention d'un modèle flou TS

Le cas utilisé le plus fréquemment, par exemple dans [Tanaka *et al.*, 1998], est d'utiliser une transformation sur des fonctions à une variable. Dans la suite, sans perte de généralité, on suppose que 0 est le point d'équilibre, tous les intervalles sur lesquels seront découpées les variables contiendront donc l'origine. On peut résumer ce cas par le lemme suivant :

Lemme 2.2.1. *Pour* $x \in [-b, a]$, $a > 0$, $b > 0$, *soit* $f(x)$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction bornée, alors il existe toujours deux fonctions* $h_1(x)$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $h_2(x)$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et deux scalaires* α *et* β *vérifiant les propriétés suivantes* $h_1(x) + h_2(x) = 1$, $h_1(x) \geq 0$, $h_2(x) \geq 0$, *et :* $f(x) = h_1(x)\,\alpha + h_2(x)\,\beta$.

Proof. elle est évidente en considérant que $f_{min} \leq f(x) \leq f_{max}$ sur l'intervalle considéré, on peut toujours écrire :
$f(x) = h_1(x)\,\alpha + h_2(x)\,\beta$ avec : $h_1(x) = \frac{f(x)-f_{min}}{f_{max}-f_{min}}$, $h_2(x) = \frac{f_{max}-f(x)}{f_{max}-f_{min}}$, $\alpha = f_{max}$ et $\beta = f_{min}$. □

Exemple 2.2.1. on considère le modèle non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = x(t) \cdot cos(x(t))$$

Pour traiter la non linéarité, et la "reporter" dans la partie prémisse du modèle flou, il faut prendre en compte la fonction $f(x) = cos(x)$ qui est évidemment bornée. Pour $x \in [-x_0, x_0]$, $x_0 \leq \pi$ on obtient :

$$cos(x) = \frac{cos(x) - cos(x_0)}{1 - cos(x_0)} \cdot 1 + \frac{1 - cos(x)}{1 - cos(x_0)} \cdot cos(x_0)$$

On aboutit donc au modèle TS à deux règles suivant :

$$\begin{array}{lll} \text{Si } x \text{ est } h_1(x) & \text{alors} & \dot{x}(t) = x(t) \cdot 1 \\ \text{Si } x \text{ est } h_2(x) & \text{alors} & \dot{x}(t) = x(t) \cdot cos(x_0) \end{array}$$

si on choisit $x_0 > \pi$ on obtient :

$$cos(x) = \frac{cos(x) + 1}{2} \cdot 1 + \frac{1 - cos(x)}{2} \cdot (-1)$$

et on aboutit donc au modèle TS à deux règles suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{Si } x \text{ est } h_1(x) & \text{alors } \dot{x}(t) = x(t) \cdot 1 \\ \text{Si } x \text{ est } h_2(x) & \text{alors } \dot{x}(t) = x(t) \cdot (-1) \end{array}$$

Pour éviter d'avoir des modèles ayant des termes constants, quand cela est possible, le traitement des termes non linéaires intervenant dans le modèle non linéaire peut se faire suivant deux manières. Effectivement, de manière générale, le modèle non linéaire doit être transformé pour aboutir à :

$$\dot{x}(t) = f'(x(t)) \cdot x(t) + g(x(t)) \cdot u(t)$$

Si pour $g(x(t))$, il suffit de considérer les non linéarités bornées, pour $f'(x(t))$ cela revient à considérer des fonctions du type : $\frac{f_i(x_j)}{x_j}$, en vérifiant évidemment que cette fonction est bornée. Dans ce cas on a, comme 0 est un point d'équilibre, $f(0) = 0$ et il faut obligatoirement avoir : $\lim_{x_j \to 0} \frac{f_i(x_j)}{x_j} < \infty$. Dans le cas contraire il ne semble pas possible de proposer un modèle de type TS sans terme constant. Le système $\dot{x}(t) = \sqrt[3]{x^2(t)}$ en est un exemple.

On considère le modèle non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = sin(x(t))$$

Pour traiter cette non linéarité, et la "reporter" dans la partie prémisse du modèle flou, il faut prendre en compte la fonction $f(x) = \frac{sin(x)}{x}$ qui est évidemment bornée. Pour $x \in [-x_0, x_0]$, $x_0 \leq \frac{\pi}{2}$ on obtient :

$$\frac{sin(x)}{x} = \frac{x_0 sin(x) - x sin(x_0)}{x(x_0 - sin(x_0))} \cdot 1 + \frac{x_0(x - sin(x))}{x(x_0 - sin(x_0))} \cdot \frac{sin(x_0)}{x_0}$$

On aboutit donc au modèle TS à deux règles suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{Si } x \text{ est } h_1(x) & \text{alors } \dot{x}(t) = x(t) \cdot 1 \\ \text{Si } x \text{ est } h_2(x) & \text{alors } \dot{x}(t) = x(t) \cdot \dfrac{sin(x_0)}{x_0} \end{array}$$

On peut alors proposer le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. *Soit un modèle non linéaire affine en la commande décrit équation (2.1) et (2.2) vérifiant que les non linéarités prennent en compte des fonctions bornées sur un domaine $\mathcal{D}$ des variables d'état, i.e. $x(t) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ et $0 \in \mathcal{D}$. Il est toujours possible d'obtenir un modèle flou de type TS représentant exactement le modèle non linéaire sur $\mathcal{D}$. Le nombre de règles obtenu est 2^p avec p correspondant au nombre de transformations effectuées.*

Néanmoins, le modèle obtenu n'est pas unique, et il peut être capital d'obtenir des modèles ayant un nombre de règles minimal. Pour illustrer ces propos considérons le modèle non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = sin(x(t)) - x^3(t) + x(t) cos(x(t))$$

Une première façon de faire, de manière "brute" est de considérer chaque non linéarité séparément, ce qui revient à devoir transformer : $\frac{sin(x)}{x}$, x^2 et $cos\,(x)$ et qui aboutit à un modèle flou à 8 règles. On peut très facilement aboutir à un modèle à 2 règles en considérant directement la fonction $f\,(x) = \frac{sin(x(t))}{x(t)} - x^2\,(t) + cos\,(x\,(t))$. Par exemple pour $x \in [-\pi, \pi]$ on a :

$f_{min} = -1 - \pi^2$ et $f_{max} = 2$, ce qui permet d'obtenir un modèle flou à 2 règles suivant :

$$\begin{array}{lll} \text{Si } x \text{ est } h_1\,(x) & \text{alors} & \dot{x}\,(t) = x\,(t) \cdot 2 \\ \text{Si } x \text{ est } h_2\,(x) & \text{alors} & \dot{x}\,(t) = x\,(t) \cdot \left(-1 - \pi^2\right) \end{array}$$

Dans le cas général il semble difficile d'obtenir le nombre de règles minimal, ce nombre étant fortement dépendant des modèles non linéaires. Les exemples présentés n'utilisent qu'une seule variable d'état, pour plusieurs variables d'état, le problème est encore plus complexe.

Sur la base du dernier exemple traité, on peut proposer un traitement par équations d'état. Sur le modèle non linéaire, considéré ici en régime libre, on prend en compte chaque équation différentielle correspondant à une variable d'état, i.e., pour le modèle non linéaire : $\dot{x}\,(t) = f\,(x\,(t))$.

L'origine étant un point d'équilibre on a $f\,(0) = 0$. Pour la $i^{ème}$ variable d'état on peut écrire :

$$\dot{x}_i\,(t) = f_i\,(x\,(t)) = \sum_{j=1}^{n} f_i^j\,(x\,(t))\,x_j\,(t)\,,$$

et on suppose que $f_i^j\,(x\,(t))$ est une fonction bornée. Le théorème suivant donne alors une borne supérieure aux nombres de règles dans le cas général.

Théorème 2.2.2. *On considère la famille des modèles non linéaires en régime libre avec n variables d'état décrits par :* $\dot{x}\,(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_i^j\,(x\,(t))\,x_j\,(t)$, $f_i^j\,(x\,(t))$ *étant des fonctions bornées sur un domaine* $\mathcal{D}$ *des variables d'état, i.e.* $x\,(t) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ *et* $0 \in \mathcal{D}$. *Il est toujours possible d'obtenir un modèle flou de type TS sur* $\mathcal{D}$ *représentant exactement le modèle non linéaire avec au plus* 2^{n^2} *règles.*

Proof. Considérons le vecteur des prémisses suivant $z\,(t) = \left[z_1^1\,(t), \ldots, z_i^j\,(t), \ldots, z_n^n\,(t)\right]^T$ avec les variables des prémisses : $z_i^j = f_i^j\,(x\,(t))$. $f_i^j\,(x\,(t))$ étant bornée, on peut toujours écrire :

$$z_i^j = h_{i_1}^j\left(z_i^j\right) \cdot z_{i_{max}}^j + h_{i_2}^j\left(z_i^j\right) \cdot z_{i_{min}}^j = \frac{z_i^j - z_{i_{min}}^j}{z_{i_{max}}^j - z_{i_{min}}^j} \cdot z_{i_{max}}^j + \frac{z_{i_{max}}^j - z_i^j}{z_{i_{max}}^j - z_{i_{min}}^j} \cdot z_{i_{min}}^j$$

On obtient donc au maximum n^2 variables de prémisses ce qui donne au plus 2^{n^2} règles. □

Remarque 2.2.1. Ce théorème donne une borne supérieure pour le nombre de règles, il est bien évident que dans la plupart des cas, on peut avoir notamment $\exists i, j,\ f_i^j\,(x\,(t)) = 0$, ce qui indique que la $j^{ème}$ variable d'état n'est pas présente dans la $i^{ème}$ équation ou qu'elle

peut être "absorbée" par les autres $f_i^j(x(t))$, $i \neq j$. Un autre cas peut apparaître : $\exists i, j$, $f_i^j(x(t)) = 1$ ce qui indique que la $j^{ème}$ variable peut n'être utilisée que de façon linéaire. Cela permet de réduire considérablement le nombre de règles, l'exemple suivant illustre ces différentes remarques.

Exemple 2.2.2. on considère le modèle non linéaire en régime libre suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1^3(t) + sin(x_1(t))\, x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) \end{aligned}$$

Avec des transformations directes sur les non linéarités présentes, il faut utiliser les fonctions $sin(x_1(t))$, $x_1^2(t)$ et $x_2(t)$ ce qui amène un modèle sous la forme TS à 8 règles. La deuxième équation étant linéaire on a bien entendu $f_2^1(x(t)) = f_2^2(x(t)) = 1$. En utilisant : $f_1^1(x(t)) = x_1^2(t)$ et $f_1^2(x(t)) = sin(x_1(t))\, x_2(t)$, et en utilisant comme variable de prémisses $z_1(t) = x_1^2(t)$ et $z_2(t) = sin(x_1(t))\, x_2(t)$ on aboutit à un modèle à 4 règles. Mais, dans ce cas, on peut même proposer un modèle à 2 règles ! Effectivement, on peut utiliser comme variable de prémisse : $z_1(t) = x_1^2(t) + \frac{sin(x_1(t))}{x_1(t)} x_2^2(t)$, ainsi $f_1^2(x(t)) = 0$ et on aboutit au modèle pour $x_1(t) \in [-x_{10}, x_{10}]$, $x_2(t) \in [-x_{20}, x_{20}]$ et avec $z_{1min} = min_{x1,x2}(z_1)$, $z_{1max} = max_{x1,x2}(z_1)$, $h_1(z_1) = \frac{z_1(t) - z_{1min}}{z_{1max} - z_{1min}}$, $h_2(z_1) = \frac{z_{1max} - z_1(t)}{z_{1max} - z_{1min}}$:

$$\text{Si } z_1 \text{ est } h_1(z_1) \quad \text{alors} \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} z_{1max} & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$\text{Si } z_1 \text{ est } h_2(z_1) \quad \text{alors} \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} z_{1min} & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

2.2.2. Influence sur la stabilisation

Il semble alors évident que l'influence de la modélisation sur la stabilisation des systèmes est capitale. Pour illustrer ce propos reprenons le dernier exemple traité, en utilisant un vecteur commun pour les entrées $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Dans ce cas, la stabilisation reviendra simplement à déterminer une solution au problème LMIs suivant :

Trouver X et M_i tels que

$$\forall i, \quad X A_i^T + A_i X - M_i^T B_i^T - B_i M_i < 0$$

Les solutions seront données par $P = X^{-1}$ et $F_i = M_i P$. Il n'y a pas de conditions correspondant aux sous-modèles croisés puisque les matrices d'entrées sont communes à tous les sous-modèles.

Pour le modèle à 4 règles les matrices sont données par :

$$A_1 = \begin{bmatrix} x_{10}^2 & x_{20} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} x_{10}^2 & -x_{20} \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & x_{20} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -x_{20} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas une loi de commande type PDC peut être obtenue si : $x_{10} < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dans ce cas, x_{20} ne semble pas avoir d'influence sur l'obtention de condition de stabilisation.

Enfin pour le modèle à 2 règles, on a :

$$A_1 = \begin{bmatrix} z_{1max} & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} z_{1min} & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

Dans ce cas, il semble que le problème LMI ait toujours une solution. A titre d'exemple, pour $x_{10} = \pi$ et $x_{20} = 10$, un résultat est donné par : $F_1 = \begin{bmatrix} 169,5 & -33,05 \end{bmatrix}$, $F_2 = \begin{bmatrix} 3,51 & -0,97 \end{bmatrix}$ et la matrice commune P :

$$P = \begin{bmatrix} 6,077941 & -1,174808 \\ -1,174808 & 0,578911 \end{bmatrix}.$$

Dans ce dernier cas la loi de commande de type PDC s'explicite de la manière suivante, avec $z_1(t) = x_1^2(t) + \frac{sin(x_1(t))}{x_1(t)} x_2^2(t)$:

$$u(t) = \left(\frac{z_1(t) - z_{1min}}{z_{1max} - z_{1min}} F_1 + \frac{z_{1max} - z_1(t)}{z_{1max} - z_{1min}} F_2 \right) x(t).$$

Les conditions initiales pour les simulations sont données par $x(0) = [1 \; -1]^T$, on retrouve les variables d'état, figure 2.1 et la commande, figure 2.2.

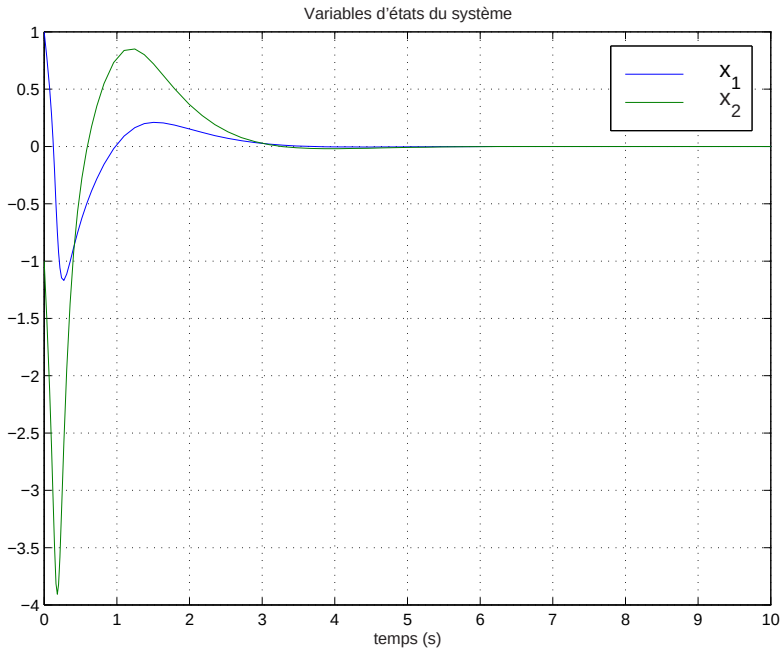


Figure 2.1. : Variables d'états du système avec les CI : $x(0) = [1 \; -1]^T$

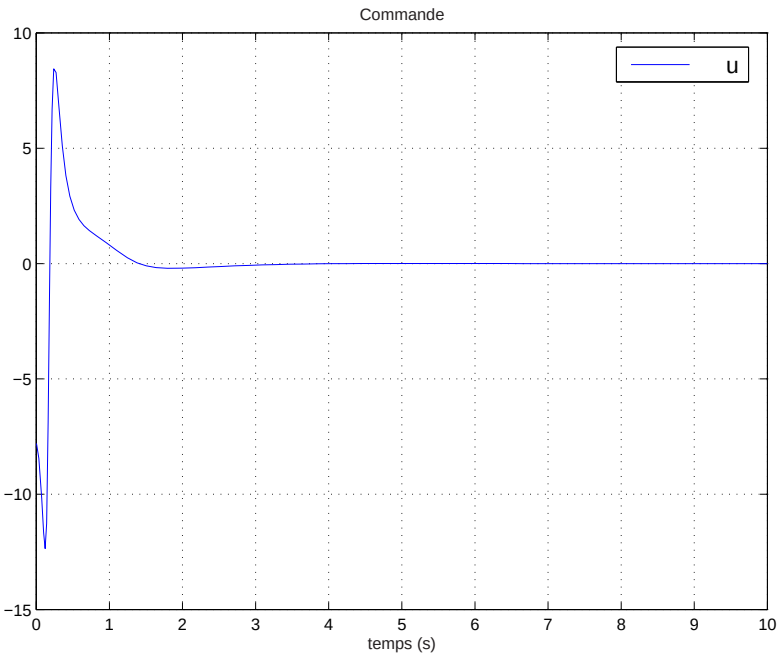


Figure 2.2. : Commande du système

Cette partie vient de proposer quelques façons de passer d'un modèle non linéaire affine en la commande à un modèle de type TS. Il semble difficile d'envisager une façon de faire unique, néanmoins, dans la pratique il faut privilégier l'obtention d'un modèle TS ayant le moins de règles possibles. Cela est dû au fait, que l'une des raisons de la conservativité des résultats obtenus pour la stabilisation est la recherche d'une matrice $P > 0$ unique pour tous les sous-modèles.

Enfin, d'autres transformations peuvent être envisagées, utilisant par exemple des difféomorphismes, qui peuvent se révéler judicieuses pour certains type de modèles, ce point sera discuté dans les perspectives au chapitre 5.

La partie suivante propose de remplacer la loi de commande PDC utilisée classiquement sur des modèles flous de type TS, par une loi de type CDF.

2.3. Analyse de la stabilisation par loi de commande CDF

Dans la suite, la loi de commande utilisée est de la forme :

$$u(t) = -\frac{\sum_i h_i(z(t))\, k_i F_i x(t)}{\sum_i h_i(z(t))\, k_i} \tag{2.3}$$

Avec F_i les gains de commande et $k_i > 0$. Ce type de loi de commande a été utilisée principalement lorsque les modèles flous T-S se mettent sous une forme entrée/sortie [Leung *et al.*, 1996], et dans certains cas particuliers pour des parties conclusions utilisant

un formalisme d'état [Vermeiren, 1998]. Remarquons que si $\forall i,\ k_i = 1$, la loi CDF se résume à une loi PDC puisque $\sum_i h_i = 1$.

2.3.1. Cas continu

Considérons le modèle flou suivant : $\dot{x}(t) = \sum_i h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$ en utilisant une loi de commande u de type CDF (2.3) [Guerra et Vermeiren, 1998] (Compensation et Division pour modèle Flou), le modèle en boucle fermée s'écrit :

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_i \sum_j h_i(z(t))\, h_j(z(t))\, k_j (A_i - B_i F_j)}{\sum_i h_i(z(t))\, k_i} x(t) \tag{2.4}$$

Remarque 2.3.1. on supposera que les matrices d'entrée B_i ne vérifient pas une propriété de dépendance linéaire du type : $\forall i,\ B_i = k_i B$. Effectivement, dans ce cas, la boucle fermée s'écrit : $\dot{x}(t) = \sum_i h_i(z(t))(A_i - B_i F_i)x(t)$ et les conditions de stabilité sont alors celles données par (1.24) dans le cas continu et (1.26) dans le cas discret, les sous-modèles croisés n'étant plus pris en compte [Vermeiren, 1998].

Remarque 2.3.2. on peut considérer que les k_i $i \in \{1, \ldots, r\}$ réalisent une sorte de balance sur les matrices d'entrée et permettent de moduler l'importance relative des sous-modèles $G_{ij} = A_i - B_i F_j$.

Avec la loi de commande (2.3), les conditions de stabilisation sont données par le théorème suivant :

Théorème 2.3.1. *S'il existe une matrice $P > 0$, des matrices de gain F_i et des scalaires $k_i > 0$ $i \in \{1, \ldots, r\}$ vérifiant :*

$$\forall i, \qquad G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0 \tag{2.5}$$

$$\forall i, j/j > i,\ (k_j G_{ij} + k_i G_{ji})^T P + P(k_j G_{ij} + k_i G_{ji}) \leq 0 \tag{2.6}$$

avec $G_{ij} = A_i - B_i F_j$, le modèle flou (2.4) est asymptotiquement stable. □

Proof. Considérons la fonction de Lyapunov quadratique

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$$

dont la dérivée s'écrit :

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t).$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x(t)) &= x^T \left(\frac{\sum_i \sum_j h_i h_j k_j (A_i - B_i F_j)^T}{\sum_i h_i k_i} P + P \frac{\sum_i \sum_j h_i h_j k_j (A_i - B_i F_j)}{\sum_i h_i k_i} \right) x \\
&= x^T \left(\frac{\sum_i \sum_j h_i h_j k_j}{\sum_i h_i k_i} \left((A_i - B_i F_j)^T P + P (A_i - B_i F_j) \right) \right) x \\
&= x^T \frac{\sum_i h_i^2 k_i}{\sum_i h_i k_i} \left((A_i - B_i F_i)^T P + P (A_i - B_i F_i) \right) x \\
&\quad + x^T \frac{\sum_i \sum_{j, j>i} h_i h_j}{\sum_i h_i k_i} \begin{pmatrix} k_j (A_i - B_i F_j)^T P + P k_j (A_i - B_i F_j) \\ + k_i (A_j - B_j F_i)^T P + P k_i (A_j - B_j F_i) \end{pmatrix} x
\end{aligned}$$

et avec les conditions (2.5) et (2.6), $\dot{V}(x(t)) < 0$. □

Le problème est non linéaire en les variables. Sa résolution est donc plus complexe, ce point sera discuté dans le §2.4.

2.3.2. Cas discret

Considérons le modèle flou suivant : $x(t+1) = \sum_i h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))$ en utilisant une loi de commande u de type CDF (2.3) [Guerra et Vermeiren, 1998], le modèle en boucle fermée s'écrit :

$$x(t+1) = \frac{\sum_i \sum_j h_i(z(t)) h_j(z(t)) k_j (A_i - B_i F_j)}{\sum_i h_i(z(t)) k_i} x(t) \tag{2.7}$$

Théorème 2.3.2. *Si il existe une matrice $P > 0$, des matrices de gains F_i et des scalaires $k_i > 0$ $i \in \{1, \ldots, r\}$ vérifiant :*

$$\forall i, \quad G_{ii}^T P G_{ii} - P < 0 \tag{2.8}$$

$$\forall i, j/i > j, \quad \left(\frac{k_j G_{ij} + k_i G_{ji}}{2}\right)^T P \left(\frac{k_j G_{ij} + k_i G_{ji}}{2}\right) - k_i k_j P \leq 0 \tag{2.9}$$

avec $G_{ij} = A_i - B_i F_j$, alors le modèle (2.7) est asymptotiquement stable. □

Proof. Considérons la fonction de Lyapunov quadratique

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$$

qui donne $\Delta V(x(t)) = V(x(t+1)) - V(x(t))$, qui s'écrit

$$\begin{aligned}
\Delta V(x(t)) &= x^T \left(\frac{\sum_i \sum_j h_i h_j k_j (A_i - B_i F_j)^T}{\sum_i h_i k_i} P \frac{\sum_k \sum_l h_k h_l k_l (A_k - B_k F_l)}{\sum_k h_k k_k} - P \right) x \\
&= x^T \left(\frac{1}{\sum_i \sum_j h_i h_j k_i k_j} \left(\sum_i \sum_j h_i h_j k_j (A_i - B_i F_j)^T P \sum_k \sum_l h_k h_l k_l \cdot \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (A_k - B_k F_l) - \sum_i \sum_j h_i h_j k_i k_j P \right) \right) x
\end{aligned}$$

en posant $G'_{ij} = k_j (A_i - B_i F_j)$,

$$\begin{aligned}
\Delta V(x(t)) &= \frac{1}{\sum_i \sum_j h_i h_j k_i k_j} x^T \left(\sum_i \sum_j h_i h_j G'^T_{ij} P \sum_k \sum_l h_k h_l G'_{kl} \right) x \\
&\quad - \frac{1}{\sum_i \sum_j h_i h_j k_i k_j} x^T \left(\sum_i \sum_j h_i h_j k_i k_j P \right) x
\end{aligned}$$

et d'après

$$-\left(\left(G'_{ij}+G'_{ji}\right)^T-\left(G'_{kl}+G'_{lk}\right)^T\right)\cdot P\cdot\left(\left(G'_{ij}+G'_{ji}\right)-\left(G'_{kl}+G'_{lk}\right)\right)\leq 0$$

qui permet d'écrire

$$\left(\begin{array}{c}\left(G'_{ij}+G'_{ji}\right)^T P\left(G'_{kl}+G'_{lk}\right)\\+\left(G'_{kl}+G'_{lk}\right)^T P\left(G'_{ij}+G'_{ji}\right)\end{array}\right)\leq\left(\begin{array}{c}\left(G'_{ij}+G'_{ji}\right)^T P\left(G'_{ij}+G'_{ji}\right)\\+\left(G'_{kl}+G'_{lk}\right)^T P\left(G'_{kl}+G'_{lk}\right)\end{array}\right)$$

on en déduit l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k,l}h_ih_jh_kh_lG'^T_{ij}PG'^T_{kl} &= \frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l}h_ih_jh_kh_l\left(G'_{ij}+G'_{ji}\right)^T P\left(G'_{kl}+G'_{lk}\right)\\ &\leq \frac{1}{4}\sum_{i,j}h_ih_j\left(G'_{ij}+G'_{ji}\right)^T P\left(G'_{ij}+G'_{ji}\right)\end{aligned}$$

on a alors :

$$\Delta V\left(x\left(t\right)\right)\leq\sum_i\sum_j h_ih_j\left(\frac{G'_{ij}+G'_{ji}}{2}\right)^T P\left(\frac{G'_{ij}+G'_{ji}}{2}\right)-\sum_i\sum_j h_ih_jk_ik_jP\leq 0$$

$$\begin{aligned}\Delta V\left(x\left(t\right)\right)\leq\ & x^T\left(\sum_i h_i^2k_i^2G_{ii}^TPG_{ii}-P\right)x+\\ & x^T\left(\sum_i\sum_{j,j>i}h_ih_j\left(\left(\frac{G'_{ij}+G'_{ji}}{2}\right)^T P\left(\frac{G'_{ij}+G'_{ji}}{2}\right)-k_ik_jP\right)\right)x\end{aligned}$$

avec les conditions (2.9), $\Delta V\left(x(t)\right)<0$. □

Remarque 2.3.3. Ces conditions de stabilité, continues et discrètes incluent bien évidemment celles de [Tanaka *et al.*, 1998], il suffit de choisir $\forall i\in\{1,\ldots,r\}$, $k_i=1$.

Il est important de remarquer que ces conditions sont non linéaires en les variables. Le point suivant montre la mise en œuvre pratique de la loi de commande.

2.4. Détermination de la loi de commande

2.4.1. Cas continu

Les conditions du cas continu et du cas discret peuvent être mises sous forme de BMIs (Bilinear Matrix Inequalities). Dans le premier cas, après multiplication à droite et à gauche par $X=P^{-1}$ et en utilisant le changement de variables $M_i=F_iP^{-1}$, les expressions (2.5) et (2.6) s'écrivent :

$$\begin{aligned}\forall i,\quad & XA_i^T+A_iX-M_i^TB_i^T-B_iM_i &<& \ 0\\ \forall i,j/j>i,\quad & k_j\left(XA_i^T-M_j^TB_i^T\right)+k_i\left(XA_j^T-M_i^TB_j^T\right)\\ & +k_j\left(A_iX-B_iM_j\right)+k_i\left(A_jX-B_jM_i\right) &\leq& \ 0\end{aligned}\qquad(2.10)$$

Notons que les conditions correspondant aux sous-modèles non croisés sont les mêmes LMIs que celles obtenues avec une loi PDC. Néanmoins, les conditions correspondant aux sous-modèles croisés sont des BMIs et il n'y a pas encore d'algorithmes efficaces de résolution de tels problèmes. En général une solution approchée est obtenue en utilisant un schéma de relaxation impliquant des LMIs, voir par exemple [Henrion et Tarbouriech, 1999; Xie *et al.*, 1997]. Dans notre cas, les équations (2.6) peuvent être transformées en LMIs en fixant une partie des variables inconnues. Il est possible de proposer deux relaxations qui mettent en œuvre des LMIs.

LMIR1 : Une première est obtenue en fixant les scalaires k_i, puis en trouvant les matrices X and M_i. Sans perte de généralité, une des variables k_i peut être fixée, effectivement, la loi de commande peut très bien s'écrire après division par k_1 par exemple :

$$u\left(t\right) = -\frac{\sum_i h_i\left(z(t)\right)\frac{k_i}{k_1}F_i x\left(t\right)}{\sum_i h_i\left(z(t)\right)\frac{k_i}{k_1}},$$

ce qui montre que ce sont les rapports $\frac{k_i}{k_1}$ qui ont de l'importance. Dans notre cas on choisira : $k_1 = 1$. Les autres scalaires k_i peuvent être obtenus en utilisant une grille de recherche.

De manière à réduire l'espace de recherche des scalaires k_i, un changement de variable peut être réalisé afin de réduire la recherche à l'intervalle $]0,1[$. En posant λ_i tel que $\lambda_i = \frac{k_i}{1+k_i} \in]0,1[$ avec $i \in \{1,\ldots,r\}$, donne $k_i = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i}$. Par exemple, le problème (2.10) est équivalent à trouver une matrice $P > 0$, un ensemble de matrices M_i et des scalaires λ_i $i \in \{1,\ldots,r\}$ tels que :

- $\forall i \in \{1,\ldots,r\}$, $XA_i^T + XA_i - M_i^T B_i^T - B_i M_i < 0$
- $\forall i,j/j>i$,

$$\begin{aligned}\left(1-\lambda_i\right)\lambda_j\left(XA_i^T + A_iX - M_j^T B_i^T - B_iM_j\right)\\ +\left(1-\lambda_j\right)\lambda_i\left(XA_j^T + A_jX - M_i^T B_j^T - B_jM_i\right) \quad\leq\quad 0\end{aligned}$$

avec $\lambda_1 = 0,5$.

LMIR2 : La seconde relaxation est obtenue en fixant la matrice P. Dans ce cas, l'utilisation du changement de variable : $F_i' = k_i F_i$ permet de se ramener au problème LMI suivant : trouver les matrices F_i' et les scalaires $k_i > 0$ $i \in \{1,\ldots,r\}$ tels que :

- $\forall i \in \{1,\ldots,r\}$, $\left(k_iA_i - B_iF_i'\right)^T P + P\left(k_iA_i - B_iF_i'\right) < 0$
- $\forall i,j/j>i$,

$$\left(k_jA_i + k_iA_j - B_jF_i' - B_iF_j'\right)^T P + P\left(k_jA_i + k_iA_j - B_jF_i' - B_iF_j'\right) \leq 0$$

2.4.2. Cas discret

Les problèmes rencontrés dans le cas discret sont identiques. Les relaxations sont alors les suivantes :

LMIR1 : De la même manière que dans le cas continu, l'intervalle de recherche des valeurs de k_i est restreint en effectuant le même changement de variable. Ainsi, pour que le modèle flou associé soit globalement asymptotiquement stable, il doit vérifier les conditions suivantes, en posant $G_{ij} = (A_i - B_iF_j)$:

– Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, $G_{ii}^T P G_{ii} - P < 0$
– Pour $j > i$

$$\left(\frac{\lambda_j (1-\lambda_i) G_{ij} + \lambda_i (1-\lambda_j) G_{ji}}{2}\right)^T P \left(\frac{\lambda_j (1-\lambda_i) G_{ij} + \lambda_i (1-\lambda_j) G_{ji}}{2}\right) - \lambda_i \lambda_j (1-\lambda_i)(1-\lambda_j) P \leq 0$$

avec $\lambda_1 = 0,5$.

Ces conditions peuvent être mises sous la forme de LMIs. En multipliant par P^{-1} à droite et à gauche et en utilisant le complément de Schur [El Ghaoui, 1997] avec $X = P^{-1}$ et $M_i = F_i P^{-1} = F_i X$, on obtient :

– Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$:

$$\forall i, \quad \begin{pmatrix} X & X A_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i X - B_i M_i & X \end{pmatrix} > 0$$

– Pour $j > i$:

$$\forall i, j/j > i \quad \begin{pmatrix} \lambda_j (1-\lambda_i) X & \\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_j (1-\lambda_i)(A_i X - B_i M_j) \\ +\lambda_i (1-\lambda_j)(A_j X - B_j M_i) \end{pmatrix} & \\ & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_j (1-\lambda_i)(A_i X - B_i M_j) \\ +\lambda_i (1-\lambda_j)(A_j X - B_j M_i) \end{pmatrix}^T \\ & \lambda_i (1-\lambda_j) X \end{pmatrix} \geq 0$$

avec $\lambda_1 = 0,5$.

L'algorithme pour la relaxation *LMIR1* consiste alors, aussi bien en continu qu'en discret, à parcourir une grille de recherche pour les λ_i avec un pas de recherche δ fixé. Notons que le problème est exponentiel en fonction du nombre de règles, pour r règles le nombre de problèmes LMIs mis en œuvre est de $nb = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{r-1}$. Avec un pas de $0,01$ et pour un modèle flou à 2 règles, $nb = 100$, pour un modèle flou à 3 règles, $nb = 10000$, à 4 règles, $nb = 10^6$, ...

Ce nombre peut-être grand mais la recherche peut largement être améliorée en fixant des bornes plus restreintes aux λ_i. Commencer par $\forall i,\ \lambda_i = 0,5$ revient à formuler le problème LMI classique pour le calcul d'une loi PDC [Tanaka *et al.*, 1998]. La connaissance *a priori* des B_i permet de situer également leurs relations de dépendance et de fixer un intervalle de recherche réduit.

LMIR2 : La seconde relaxation dans le cas discret est obtenue en fixant la matrice P. Dans ce cas, l'utilisation du changement de variable : $F_i' = k_i F_i$ permet de se ramener à un problème LMI. Effectivement, les conditions non croisées peuvent s'écrire :

$(k_i A_i - B_i F_i')^T P (k_i A_i - B_i F_i') - k_i^2 P < 0$ et en utilisant le complément de Schur après multiplication droite et gauche par $X = P^{-1}$ et en utilisant le changement de variables $M_i' = F_i' P^{-1}$:

$$\forall\, i, \quad \begin{pmatrix} k_i X & X k_i A_i^T - M_i'^T B_i^T \\ k_i A_i X - B_i M_i' & k_i X \end{pmatrix} > 0$$

Pour les conditions restantes, on utilise le même type de changement de variables. Le problème LMI obtenu est alors le suivant :

trouver les matrices M_i' et les scalaires $k_i > 0$ $i \in \{1, \ldots, r\}$ tels que :

$$\forall\, i, \quad \begin{pmatrix} k_i X & X k_i A_i^T - M_i'^T B_i^T \\ k_i A_i X - B_i M_i' & k_i X \end{pmatrix} > 0$$

$$\forall\, j > i,$$
$$\begin{pmatrix} k_j X & \frac{1}{2}\left(X\left(k_j A_i + k_i A_j\right) - B_j M_i' - B_i M_j'\right)^T \\ \frac{1}{2}\left(\left(k_j A_i + k_i A_j\right) X - B_j M_i' - B_i M_j'\right) & k_i X \end{pmatrix} > 0$$

On peut très facilement étendre les conditions obtenues en utilisant les conditions relâchées de [Tanaka *et al.*, 1998].

Un algorithme complet utilisant les relaxations *LMIR1* et *LMIR2* pour résoudre les BMIs est donné ci-après.

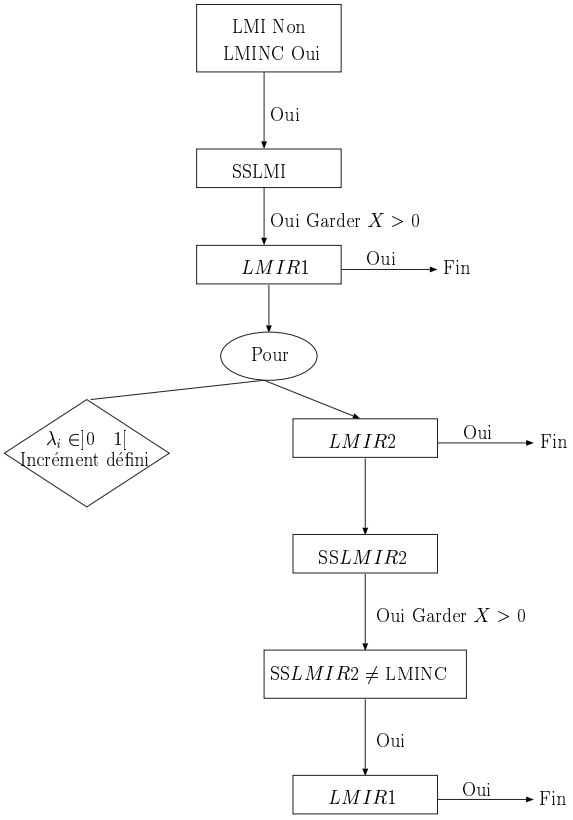


Figure 2.3. : Algorithme de relaxation des BMIS par *LMIR1* et *LMIR2*

Les notations sont les suivantes :

- LMI : problème utilisant les LMIs classiques pour une loi PDC,
- LMINC : ensemble des LMIs non croisées, en continu (2.5), en discret (2.8),
- *LMIR1* et *LMIR2*, les relaxations des conditions BMIs explicitées plus avant,
- SSLMI : le plus grand sous-ensemble issu des LMIs classiques permettant d'obtenir une solution et contenant LMINC, cette dernière s'explique par le fait que LMI et LMIR2 contiennent LMINC.
- SSLMIR2 : le plus grand sous-ensemble issu de la relaxation LMIR2 permettant d'obtenir une solution et contenant LMINC, si SSLMIR2 se réduit à LMINC, il est inutile d'essayer la relaxation LMIR1.

Remarque 2.4.1. dans le cas à deux règles, SSLMIR2=SSLMI=LMINC, pour chaque modèle étudié, l'algorithme se réduit à rechercher séparément les conditions par *LMIR1* et LMIR2.

Le paragraphe suivant propose un principe de séparation dans le cas de modèles flous utilisant dans la partie prémisse des variables mesurables, entre la loi de commande CDF et un observateur flou.

2.5. Principe de séparation appliqué à la loi de commande CDF

Ce principe est basé sur l'approche décrite dans [Ma *et al.*, 1998]. Lorsque le vecteur d'état n'est pas accessible, l'utilisation d'un observateur est nécessaire. Dans notre cas, un observateur flou décrit par (1.34) dans le cas continu et (1.36) dans le cas discret est choisi. Dans toute la suite nous nous placerons dans le cas où les variables de prémisse sont mesurables, et, dans le cas général, $z_i(t)$ doit être remplacée par son estimée $\hat{z}_i(t)$ et il n'y a pas de principe de séparation disponible.

2.5.1. Cas continu

Dans le cas continu, l'observateur utilise les mêmes variables de prémisse que le modèle flou auquel il est associé et il possède la forme suivante :

Règle i de l'observateur :

Si $z_1(t)$ est F_1^i et $z_2(t)$ est F_2^i ... et $z_p(t)$ est F_p^i

$$\text{Alors} \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_i\hat{x}(t) + B_iu(t) + K_i\left(y(t) - \hat{y}(t)\right) \\ \hat{y}(t) = C_i\hat{x}(t) \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$

En utilisant la loi de commande CDF et après quelques calculs simples, l'expression suivante est obtenue :

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{\sum_j h_j k_j} \sum_i \sum_j h_i h_j \left(k_j \left(A_i - B_iF_j\right) x(t) + k_j B_iF_j\tilde{x}(t)\right) \tag{2.11}$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_i \sum_j h_i h_j \left(A_i - K_iC_j\right)\tilde{x}(t) \quad \text{avec } \tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{2.12}$$

Théorème 2.5.1. *Supposons qu'il existe deux fonctions scalaires $V(x)$, $\tilde{V}(\tilde{x})$ telles que :*
- *$V(x(t)) = x^T(t) P_c x(t)$ une fonction candidate de Lyapunov qui garantit la stablité quadratique du système en boucle fermée sans l'observateur $\dot{x}(t) = \frac{1}{\sum_j h_j k_j} \sum_i \sum_j h_i h_j (k_j (A_i - B_i F_i) x(t))$, il existe donc trois réels γ_1, γ_2 et γ_3 tels que $\gamma_1 \|x\|^2 \leq V \leq \gamma_2 \|x\|^2$, $\dot{V} \leq -\gamma_3 \|x\|^2$,*
- *$\tilde{V}(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}^T(t) P_0 \tilde{x}(t)$ une fonction candidate de Lyapunov qui garantit la stablité quadratique du système (2.12), il existe donc trois réels $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$ et $\tilde{\gamma}_3$ tels que $\tilde{\gamma}_1 \|\tilde{x}\|^2 \leq \tilde{V} \leq \tilde{\gamma}_2 \|\tilde{x}\|^2$, $\dot{\tilde{V}} \leq -\tilde{\gamma}_3 \|\tilde{x}\|^2$,*

alors le système bouclé avec observateur (2.11) et (2.12) est globalement asymptotiquement stable.

La démonstration suit celle du cas classique décrite dans [Ma *et al.*, 1998].

Proof. $\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T(t) P_c x(t) + x^T(t) P_c \dot{x}(t)$

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) = \frac{1}{\sum_j h_j k_j} \Bigg(& x^T(t) \sum_i \sum_j h_i h_j \\ & \Big(k_j (A_i - B_i F_j)^T P + P k_j (A_i - B_i F_j) \Big) x(t) \\ & + 2 x^T(t) P \sum_i \sum_j h_i h_j k_j B_i F_j \tilde{x}(t) \Bigg)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) &\leq -\gamma_3 \|x(t)\|^2 + \frac{2}{\sum_j h_j k_j} x(t) P_c \sum_i \sum_j h_i h_j k_j B_i F_j \tilde{x}(t) \\ &\leq -\gamma_3 \|x(t)\|^2 + \frac{2}{\sum_j h_j k_j} \sum_i \sum_j h_i h_j k_j \|P_c B_i F_j\| \|x(t)\| \|\tilde{x}(t)\|\end{aligned}$$

La différence principale avec le cas classique est la borne inférieure de $\sum_j h_j k_j$, qui s'obtient aisément par : $\sum_j h_j k_j \geq \sum_j h_j \min_j(k_j) = \min_j(k_j) > 0$ et avec $\forall j,\ k_j > 0$ on en déduit : $\dot{V}(x) \leq -\gamma_3 \|x(t)\|^2 + \delta \|x(t)\| \|\tilde{x}(t)\|$ avec $\delta = \frac{2}{\min_j(k_j)} \sum_i \sum_j h_i h_j k_j \|P_c B_i F_j\|$

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) &\leq -\frac{\gamma_3}{2} \|x(t)\|^2 - \frac{\gamma_3}{2} \|x(t)\|^2 + \delta \|x(t)\| \|\tilde{x}(t)\| \\ &\leq -\frac{\gamma_3}{2} \|x(t)\|^2 + \frac{\delta^2}{2\gamma_3} \|\tilde{x}(t)\|^2 - \left(\sqrt{\frac{\gamma_3}{2}} \|x(t)\| - \frac{\sqrt{2}\delta}{2\sqrt{\gamma_3}} \|\tilde{x}(t)\| \right)^2 \\ &\leq -\frac{\gamma_3}{2\gamma_2} V(x(t)) + \frac{\delta^2}{2\gamma_3 \tilde{\gamma}_1} \tilde{V}(\tilde{x}(t))\end{aligned}$$

De la même manière, $\dot{\tilde{V}}(\tilde{x})$ est écrite :

$$\dot{\tilde{V}}(\tilde{x}(t)) = \dot{\tilde{x}}^T(t) P_o \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) P_o \dot{\tilde{x}}(t)$$

et après quelques manipulations, l'inégalité suivante est déterminée :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{V}}\left(\tilde{x}\left(t\right)\right) &\leq -\tilde{\gamma}_3 \left\|\tilde{x}\left(t\right)\right\|^2 \sum_i \sum_j h_i h_j \left(A_i - K_i C_j\right) \tilde{x}\left(t\right) \\ &\leq -\tilde{\gamma}_3 \left\|\tilde{x}\left(t\right)\right\|^2 \leq -\frac{\tilde{\gamma}_3}{\tilde{\gamma}_2} \tilde{V}\left(\tilde{x}\left(t\right)\right)\end{aligned}$$

finalement :

$$\begin{bmatrix} \dot{V}\left(x\left(t\right)\right) \\ \dot{\tilde{V}}\left(\tilde{x}\left(t\right)\right) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -\frac{\gamma_3}{2\gamma_2} & \frac{\delta^2}{2\gamma_3 \tilde{\gamma}_1} \\ 0 & -\frac{\tilde{\gamma}_3}{\tilde{\gamma}_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V\left(x\left(t\right)\right) \\ \tilde{V}\left(\tilde{x}\left(t\right)\right) \end{bmatrix} = A^d \begin{bmatrix} V\left(x\left(t\right)\right) \\ \tilde{V}\left(\tilde{x}\left(t\right)\right) \end{bmatrix}$$

A^d est évidemment une matrice de stabilité et en utilisant le principe de comparaison vectorielle [Borne *et al.*, 1993b], le système complet en boucle fermée est globalement asymptotiquement stable. □

2.5.2. Cas discret

Dans ce cas discret, l'observateur est donné par :

Règle i de l'observateur :

Si $z_1(t)$ est F_1^i et $z_2(t)$ est F_2^i ... et $z_p\left(t\right)$ est F_p^i

$$\text{Alors} \left\{ \begin{array}{l} \hat{x}(t+1) = A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i \left(y(t) - \hat{y}(t)\right) \\ \hat{y}(t) = C_i \hat{x}(t) \end{array} \right. \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$

et le modèle complet bouclé avec l'observateur :

$$x\left(t+1\right) = \frac{1}{\sum_j h_j k_j} \sum_i \sum_j h_i h_j \left(k_j \left(A_i - B_i F_j\right) x\left(t\right) + k_j B_i F_j \tilde{x}\left(t\right)\right) \tag{2.13}$$

$$\tilde{x}\left(t+1\right) = \sum_i \sum_j h_i h_j \left(A_i - K_i C_j\right) \tilde{x}\left(t\right) \quad \text{avec } \tilde{x}\left(t\right) = x\left(t\right) - \hat{x}\left(t\right) \tag{2.14}$$

Supposons qu'il existe deux fonctions scalaires $V\left(x\right)$, $\tilde{V}\left(\tilde{x}\right)$ telles que :

- $V\left(x\left(t\right)\right) = x^T\left(t\right) P_c x\left(t\right)$ une fonction candidate de Lyapunov qui garantit la stablité quadratique du système en boucle fermée sans l'observateur $x\left(t+1\right) = \frac{1}{\sum_j h_j k_j} \sum_i \sum_j h_i h_j \left(k_j \left(A_i - B_i F_i\right) x\left(t\right)\right)$, il existe donc trois réels $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$ et $\tilde{c}_3$ tels que $\tilde{c}_1 \left\|\tilde{x}\right\|^2 \leq \tilde{V} \leq \tilde{c}_2 \left\|\tilde{x}\right\|^2, \Delta\tilde{V} \leq -\tilde{c}_3 \left\|\tilde{x}\right\|^2$,
- $\tilde{V}\left(\tilde{x}\left(t\right)\right) = \tilde{x}^T\left(t\right) P_0 \tilde{x}\left(t\right)$ une fonction candidate de Lyapunov qui garantit la stablité quadratique du système (2.14), il existe donc trois réels $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$ et $\tilde{c}_3$ tels que $\tilde{c}_1 \left\|\tilde{x}\right\|^2 \leq \tilde{V} \leq \tilde{c}_2 \left\|\tilde{x}\right\|^2, \Delta\tilde{V} \leq -\tilde{c}_3 \left\|\tilde{x}\right\|^2$,

alors le système bouclé avec observateur (2.13) et (2.14) est globalement asymptotiquement stable.

Proof. Comme dans le cas continu, la démonstration suit celle de [Ma *et al.*, 1998] avec la même borne inférieure pour $\sum_j h_j k_j$.

Le paragraphe suivant présente un exemple complet en stabilisation dans le cas général avec l'utilisation d'un observateur flou. □

2.6. Exemple

Considérons le modèle non linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1(t+1) & = & x_1(t) - x_1(t)\, x_2(t) + (5 + x_1(t))\, u(t) \\ x_2(t+1) & = & x_1(t) + 0,5 x_2(t) - u(t) \\ y(t) & = & x_1(t) \end{array} \right. \tag{2.15}$$

avec $x_1 \in [-a, a]$, $z(t) = x_1(t)$, et le vecteur d'état : $x(t) = [x_1(t)\ x_2(t)]^T$, avec $F_1(t) = \frac{x_1(t)+a}{2a}$ et $F_2(t) = \frac{a-x_1(t)}{2a}$ les fonctions d'appartenance de la variable de prémisse x_1, le modèle flou à deux règles suivant représente exactement le modèle non linéaire (2.15) lorsque $x_1 \in [-a, a]$.

Si $x_1(t)$ est $F_1^1(x_1(t))$ alors $\left\{ \begin{array}{rcl} x(t+1) & = & \left[\begin{array}{cc} 1 & -a \\ 1 & 0.5 \end{array} \right] x(t) + \left[\begin{array}{c} 5+a \\ -1 \end{array} \right] u(t) \\ y(t) & = & \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right] x(t) \end{array} \right.$

Si $x_1(t)$ est $F_2^1(x_1(t))$ alors $\left\{ \begin{array}{rcl} x(t+1) & = & \left[\begin{array}{cc} 1 & a \\ 1 & 0,5 \end{array} \right] x(t) + \left[\begin{array}{c} 5-a \\ -1 \end{array} \right] u(t) \\ y(t) & = & \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right] x(t) \end{array} \right.$

En utilisant une loi de commande PDC et les conditions de stabilité relâchées décrites dans [Tanaka *et al.*, 1998] avec ce modèle, une solution pour la stabilisation peut être obtenue si $a \leq 1,746$. Lorsque l'algorithme de recherche, avec un pas de $0,01$ et une loi de commande CDF sont utilisés une solution pour la stabilisation du modèle (2.15) est obtenue si $a \leq 2,91$. Dans la cas où $a = 2,91$ la solution est : $k_1 = 1$, $k_2 = 0,17$, $F_1 = [0,3435\ \ -0,3498]$, $F_2 = [1,2961\ 2,5598]$. Seule la méthode de relaxation *LMIR1* s'est révélée utile pour obtenir ces résultats.

Les figures 2.4 et 2.5 illustrent les résultats avec $a = 2$, (dans le cas une loi de commande type PDC ne donne pas de solution) et les gains obtenus sont : $k_1 = 1$, $k_2 = 0,23$, $F_1 = [0,2713\ \ -0,3498]$, $F_2 = [0,5714\ 1,0849]$ et :

$$P = \left[\begin{array}{cc} 0,0635 & 0,0436 \\ 0,0436 & 0,0455 \end{array} \right]$$

Les conditions initiales pour la simulation sont données par $x(0) = [-0,5\ 0,2]^T$ pour le système et $\hat{x}(0) = [-0,5\ 0]$ pour l'observateur.

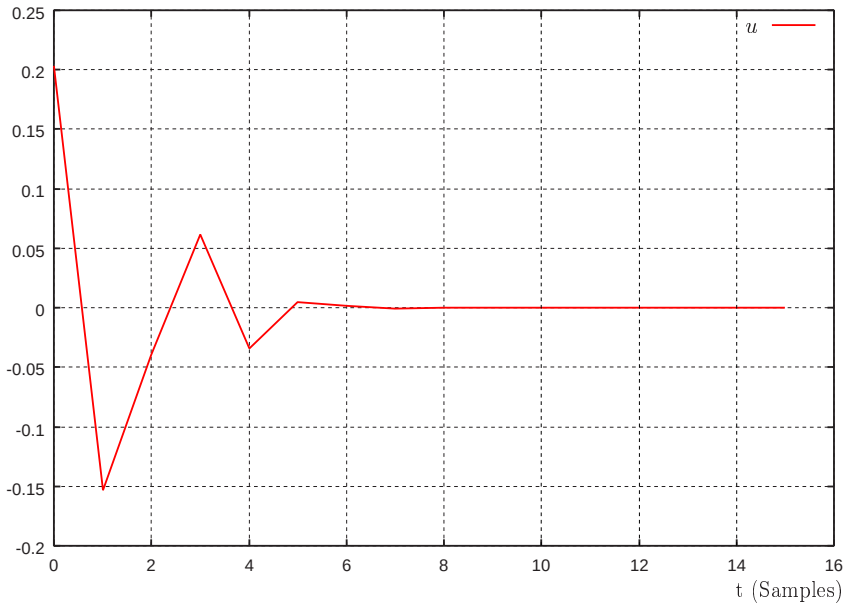


Figure 2.4. : Résultats en simulation : Commande du modèle en boucle fermée avec $x\left(0\right) = \left[-0,5\ 0.2\right]^T$ et $\hat{x}\left(0\right) = \left[-0,5\ 0\right]^T$.

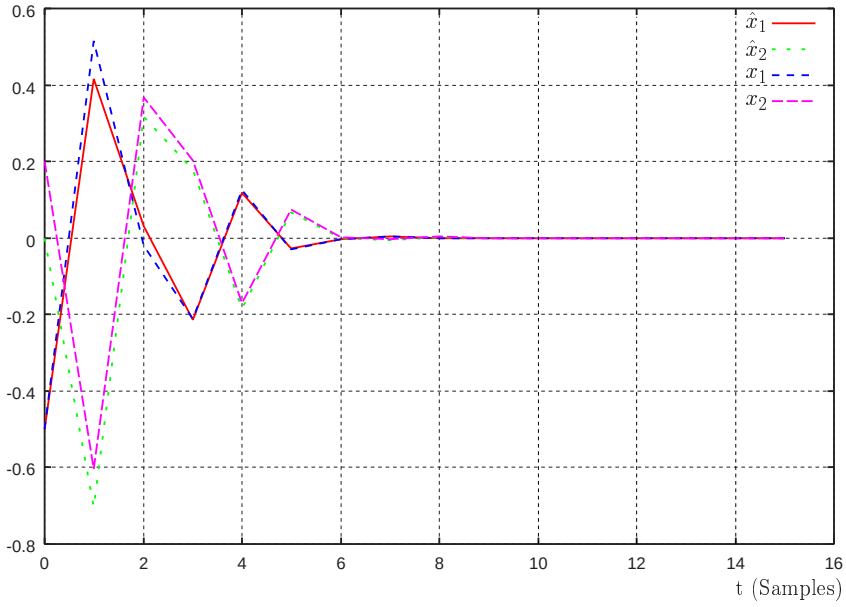


Figure 2.5. : Résultats en simulation : Variables d'états du modèle en boucle fermée avec $x\left(0\right) = \left[-0,5\ 0,2\right]^T$ et $\hat{x}\left(0\right) = \left[-0,5\ 0\right]^T$.

2.7. Conclusion

La première partie de ce chapitre a montré quelques possibilités de transformation de modèles non linéaires affines en la commande en un modèle flou de type Takagi Sugeno. Un même modèle non linéaire pouvant avoir plusieurs modèles TS le représentant, il est alors nécessaire de réaliser la transformation avec soin pour essayer d'obtenir le modèle flou ayant un nombre de règles réduit.

La deuxième partie du chapitre propose l'utilisation d'une loi de commande de type CDF au lieu d'une PDC. Les conditions de stabilisation sont données et montrent que ce changement de loi de commande se fait au détriment de la formulation LMI. Néanmoins, un algorithme utilisant des schémas de relaxation impliquant des problèmes formulés sous forme LMI, en fixant une des variables à trouver, est proposé. Le problème de cet algorithme de recherche des paramètres de la loi de commande est que le nombre de problèmes LMIs croit de façon exponentielle en fonction du nombre de règles, l'avantage étant que les solutions obtenues permettent souvent d'étendre de façon significative les domaines de stabilisation, par rapport à une stabilisation à l'aide d'une loi de type PDC.

Chapter 3

Stabilité et stabilisation non quadratique de modèles flous

«Le vrai danger, ce n'est pas quand les ordinateurs penseront comme les hommes, c'est quand les hommes penseront comme les ordinateurs.»

Sydney J. Harris.

Ce chapitre propose de nouvelles conditions de stabilité pour les modèles flous de type Takagi Sugeno comprenant un régulateur flou et/ou un observateur flou, basées sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov non-quadratique. Seul le cas discret est décrit en détail, le cas continu peut-être trouvé dans [Blanco *et al.*, 1999].

Dans le cas de la stabilisation, l'utilisation d'une loi de commande CDF (Compensation & Division pour modèles Flous) [Vermeiren, 1998] dans un cas particulier de modèles flous permet de dégager de nouvelles conditions de stabilité ainsi qu'un principe de séparation. Ces conditions se montrent moins conservatives que celles données dans [Tanaka *et al.*, 1998].

Une seconde approche basée sur les travaux de [de Oliveira *et al.*, 1999] est présentée. Elle permet l'obtention de nouvelles conditions de stabilité qui semblent néanmoins aussi conservatives que celles de [Tanaka *et al.*, 1998].

Sommaire

3.1. Introduction **54**
3.2. Limites de l'approche quadratique **55**
3.2.1. Test d'existence de $P > 0$ 55
3.2.2. Intérêt de l'utilisation de fonction de Lyapunov non quadratique 56
3.3. Stabilité des modèles flous T-S continus **58**

3.3.1. Majoration de $\dot{V}(x(t), z(t))$ . . . 58
3.3.2. Analyse de la Stabilité et de la stabilisation . . . 60
3.4. Stabilité non quadratique des modèles flous T-S discrets . 61
3.4.1. Analyse de la stabilité : 1ère approche . . . 61
3.4.1.1. Propriétés de l'approche non quadratique . . . 62
3.4.1.2. Exemple . . . 64
3.4.2. Analyse de la stabilité : 2ème approche . . . 67
3.4.2.1. Exemple . . . 69
3.5. Stabilisation non quadratique . . . 70
3.5.1. 1ère approche . . . 70
3.5.1.1. Stabilisation dans un cas particulier . . . 71
3.5.2. 2ème approche . . . 72
3.6. Principe de séparation . . . 74
3.7. Exemples . . . 74
3.7.1. Exemple 1 . . . 75
3.7.2. Exemple 2 . . . 77
3.8. Conclusion . . . 79

3.1. Introduction

Très souvent, l'étude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes fait appel à des fonctions de Lyapunov quadratiques. Un certain nombre de travaux proposent l'utilisation de fonctions de Lyapunov non quadratiques [Johansson, 1999] et montrent l'apport de cette approche. La proposition faite dans ce troisième chapitre est l'utilisation d'une fonction de Lyapunov non quadratique pour les modèles flous TS. Dans le cas des modèles flous continus, une première approche est proposée dans [Blanco *et al.*, 1999] qui est reprise en début de ce chapitre.

Dans la suite, les travaux présentés se placent dans le cas des modèles flous TS discrets. Deux approches différentes sont utilisées pour obtenir des conditions de stabilité non quadratiques. La première approche correspond globalement à une extension du cas quadratique au cas non quadratique qui dans le cas de la stabilité d'un modèle flou TS discret se fait au prix du nombre de conditions. Pour la stabilisation, en utilisant une loi PDC, cette première approche ne permet pas dans le cas général d'obtenir une formulation de type LMI des conditions obtenues. Une solution peut néanmoins être proposée avec l'utilisation d'une loi de type CDF dans un cas particulier de modèles flous TS discrets.

La deuxième approche mise en œuvre est basée sur une proposition de transformation matricielle proposée dans [de Oliveira *et al.*, 1999] et basée sur le complément de Schur. Elle permet alors de proposer une formulation LMI des conditions de stabilisation avec une loi PDC dans le cas général de modèles flous TS discrets. De plus, le principe de séparation existant dans le cas quadratique en utilisant des modèles flous dont les variables de prémisse sont mesurables est également étendu aisément au cas non quadratique. Toutes les propositions sont illustrées par des exemples qui permettent de montrer que les conditions obtenues sont moins conservatives que leurs équivalents quadratiques

3.2. Limites de l'approche quadratique

La stabilité est une des propriétés fondamentales de la commande des systèmes complexes. Elle définit les conditions de convergence de l'état du système à son point d'équilibre stable. Les fonctions de Lyapunov quadratiques sont considérées dans un premier temps pour l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires.

Comme il a été montré au chapitre 1, le résultat de l'analyse de la stabilité des systèmes décrit par

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x = \sum_{i=1}^{r} h_i(t)\,A_i x(t)$$

où $h_i(t) \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{r} h_i(t) = 1$ est donnée par l'obtention d'une solution au problème d'optimisation convexe suivant :

$$P = P^T > 0$$

$$A_i^T P + P A_i < 0,\ i = 1, \ldots, r. \tag{3.1}$$

Il est important de noter que ces conditions sont suffisantes mais non nécessaires. De plus comme il s'agit d'un problème d'optimisation convexe, si une matrice P existe elle sera forcément trouvée.

Cette mise sous forme d'inégalité linéaire matricielle (LMIs) permet de rendre l'analyse quadratique de la stabilité facilement applicable.

3.2.1. Test d'existence de $P > 0$

[Johansson, 1999] décrit un test rapide d'existence de la matrice P commune qui permet de prouver la stabilité d'un système linéaire par morceau. Ce test peut être étendu au système flou décrit par $x(t+1) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\,A_i x(t)$. Il est énoncé de la manière suivante :

Propriété 3.2.1. *S'il existe des matrices définies positives R_i telles que*

$$\begin{aligned} R_i = R_i^T > 0 \qquad & \textit{pour } i = 1, \ldots, r \\ \sum_i \left(R_i A_i^T + A_i R_i\right) > 0 & \end{aligned} \tag{3.2}$$

alors $\nexists P > 0$ telle que $A_i^T P + P A_i < 0$. □

Il n'existe donc pas de solution aux LMIs (3.1) et il n'est pas possible de conclure sur la stabilité du système.

Proof. S'il existe des matrices R_i vérifiant les inégalités (3.2), alors $\forall P > 0$,

$$\begin{aligned} Trace\left[\underbrace{P}_{>0}\underbrace{\sum_i \left(R_i A_i^T + A_i R_i\right)}_{>0}\right] &> 0 \\ \sum_i Trace\left(PR_iA_i^T + PA_iR_i\right) &> 0 \end{aligned}$$

à l'aide de la propriété $Trace\,(A \cdot B) = Trace\,(B \cdot A)$

$$\begin{aligned} \sum_i Trace\left[\left(R_iA_i^TP + R_iPA_i\right)\right] &> 0 \\ \sum_i Trace\left[\underbrace{R_i}_{>0}\left(\underbrace{A_i^TP + PA_i}_{\text{non } <0}\right)\right] &> 0 \end{aligned}$$

Il est alors possible de conclure que $A_i^TP + PA_i$ n'est pas négative et les conditions de stabilité (3.1) ne peuvent être vérifiées. □

3.2.2. Intérêt de l'utilisation de fonction de Lyapunov non quadratique

Bien que l'utilisation des conditions de stabilité quadratique permettent de déterminer de manière rapide et précise la stabilité et la stabilisation (par différentes lois de commande) des systèmes complexes (non linéaires, linéaire variant dans le temps), dans certains cas, ces résultats se montrent très conservatifs.

[Johansson, 1999] définit trois cas où l'analyse de la stabilité quadratique se montre conservative :

- dans le cas des systèmes saturés,
- dans le cas de l'utilisation de système linéaire par morceaux, aucune information sur la partition de l'espace d'état n'est prise en compte,
- certains systèmes n'acceptent pas de fonction de Lyapunov pour l'analyse de la stabilité.

Bien que l'analyse de la stabilité quadratique soit très intéressante du point de vue de la mise en œuvre pratique, ces trois points deviennent les motivations principales de l'analyse de la stabilité par fonctions de Lyapunov non quadratiques. L'exemple suivant issu de [Johansson, 1999] illustre ces propos.

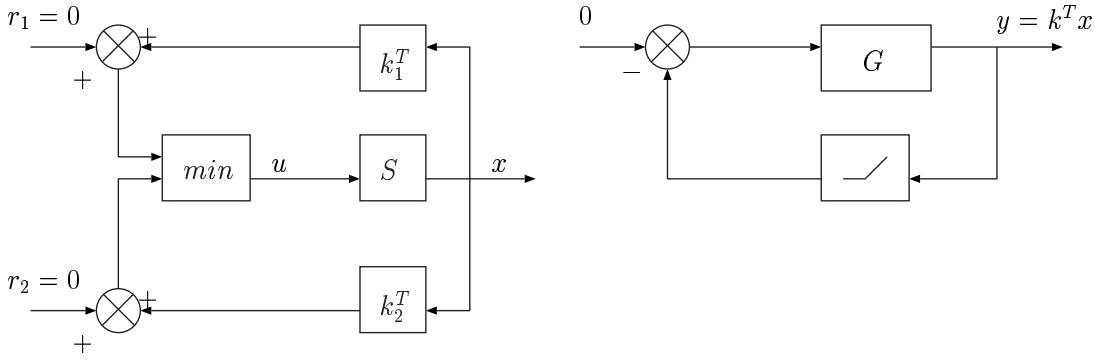


Figure 3.1. : Système de commande de séléction (gauche) et sa forme bouclée (droite)

Avec $r_1 = r_2 = 0$, en supposant que S est un système linéaire de la forme $\dot{x} = Ax + Bu$, alors la boucle fermée peut s'écrire

$$\dot{x} = Ax + B \min\left(k_1^T x, k_2^T x\right).$$

Cette réécriture induit la forme d'un système linéaire par morceau avec les dynamiques suivantes

$$\dot{x} = \begin{cases} \left(A + Bk_1^T\right) x & \text{si } k_1^T x < k_2^T x, \\ \left(A + Bk_2^T\right) x & \text{si } k_2^T x \leq k_1^T x. \end{cases}$$

en posant $k = k_1 - k_2$, $A_1 = A + Bk_1^T$et $A_2 = A + Bk_2^T$, on obtient alors

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1 x & \text{si } k^T x < 0, \\ A_2 x & \text{si } k^T x \geq 0. \end{cases}$$

En considérant le système particulier $A = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 \\ -21 \end{bmatrix}$ et $k = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, l'analyse de la stabilité par la fonction de Lyapunov $V(x) = x^T P x$, ne permet pas de conclure sur la stabilité du système. Une alternative est alors de considerer la fonction candidate de Lyapunov

$$V(x) = \begin{cases} x^T P x & \text{si } k^T x < 0, \\ x^T P x + \eta \left(k^T x\right)^2 & \text{si } k^T x \geq 0. \end{cases}$$

avec $P > 0$ et $\eta > 0 \in \mathbb{R}$, construite de telle sorte qu'elle soit continue et quadratique par morceau. Les valeurs appropriées de η et P peuvent être déterminées en résolvant les LMIs suivantes :

$$\begin{array}{rr} P = P^T > 0, & P + \eta k k^T > 0, \\ A_1^T P + P A_1 < 0 & A_2^T \left(P + \eta k k^T\right) + \left(P + \eta k k^T\right) A_2 < 0. \end{array}$$

qui admet une solution simple avec $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ et $\eta = 9$.

L'analyse de la stabilité dans le cas continu est due à [Blanco *et al.*, 1999]. Le paragraphe suivant résume les résultats de ses travaux.

3.3. Stabilité des modèles flous T-S continus

La fonction candidate de Lyapunov considérée dans ces travaux est décrite par :

$$V\left(x(t),z(t)\right)=x^{T}(t)\left[\sum_{i=1}^{r}h_{i}\left(z(t)\right)P_{i}\right]x(t) \tag{3.3}$$

avec $P_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrices symétriques définies positives et $h_i(z(t))$ les poids des règles du modèle flou tels que $\forall t,\ \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) = 1$. De façon évidente cette fonction est une fonction de Lyapunov pour les modèles flous TS.

Remarque 3.3.1. cette fonction candidate de Lyapunov est plus générale dans le sens de l'inclusion que celle choisie dans [Tanaka *et al.*, 1998], car il suffit de choisir $P_i = P,\ \forall i \in \{1,\ldots,r\}$ pour se ramener au cas des fonctions candidates quadratiques.

Afin de trouver les conditions de stabilité du modèle flou (1.2), la dérivée de la fonction candidate de Lyapunov précédement définie est étudiée.

3.3.1. Majoration de $\dot{V}\left(x\left(t\right),z\left(t\right)\right)$

La fonction $V\left(x\left(t\right),z\left(t\right)\right)$ est définie positive avec $V\left(x\left(t\right),z\left(t\right)\right)=0$ pour $x=0$. La dérivée de V le long de toutes les trajectoires du système est décomposée en deux termes :

$$\dot{V}\left(x,z\right)=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\dot{x}+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\dot{z}=l_{1}\left(x,z\right)+l_{2}\left(x,z\right),$$

$$\dot{V}\left(x,z\right)=\sum_{i=1}^{r}h_{i}(z)\frac{d}{dt}\left(x^{T}P_{i}x\right)+\sum_{i=1}^{r}\frac{dh_{i}(z)}{dt}x^{T}P_{i}x$$

avec :

$$l_{1}(x,z)=2\dot{x}^{T}\left(\sum_{i=1}^{r}h_{i}(z)P_{i}\right)x, \tag{3.4}$$

$$l_{2}(x,z)=x^{T}\left(\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{dh_{i}(z(t))}{dt}\right)P_{i}\right)x. \tag{3.5}$$

On suppose que $h_i\left(z\right)$ est dérivable par rapport au temps$t$. Il est alors possible de trouver une majoration de $l_2\left(x,z\right)$ de la forme $l_2\left(x,z\right)\leq x^T f\left(z\right)Rx$.

Majoration de l_1 L'expression de $l_1\left(x,z\right)$ est définie par :

$$l_{1}(x,z)=x^{T}\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_{i}(z)h_{j}(z)(A_{j}^{T}P_{i}+P_{i}A_{j})\right)x, \tag{3.6}$$

et la symétrie de (3.6) donne :

$$l_{1}(x,z)=x^{T}\left(\sum_{i=1}^{r}h_{i}(z)^{2}M_{ii}+2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j>i}^{r}h_{i}(z)h_{j}(z)M_{ij}\right)x, \tag{3.7}$$

avec $M_{ij} = \frac{1}{2}((A_j^T P_i + P_i A_j) + (A_i^T P_j + P_j A_i)),\ (i,j) \in \{1,\dots,r\}, j > i.$

Pour la partie des sous modèles non croisés M_{ii}, il existe une matrice $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définie négative qui satisfait :

$$A_i^T P_i + P_i A_i < S \quad \forall i \in \{1,\dots,r\}. \tag{3.8}$$

Pour la partie des modèles croisés M_{ij}, $j > i$, il existe une matrice symétrique $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ qui satisfait :

$$(A_j^T P_i + P_i A_j) + (A_i^T P_j + P_j A_i) \leq 2M, \quad \forall (i,j) \in \{1,\dots,r\}^2, j > i. \tag{3.9}$$

En conséquence, :

$$l_1(x,z) < x^T \left(\sum_{i=1}^{r} h_i(z)^2 S + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j<i}^{r} 2h_i(z)h_j(z)M \right) x,$$

$$l_1(x,z) < x^T \left(\sum_{i=1}^{r} h_i(z)^2 S + \left(1 - \sum_{i=1}^{r} h_i(z)^2\right) M \right) x.$$

En définissant la fonction $H(z) \in \mathbb{R}^r$, $H(z)^T = [h_1(z), ..., h_r(z)]$, la majoration de (3.6) suivante peut être écrite :

$$l_1(x,z) < x^T \left(M + \|H(z)\|^2 (S - M) \right) x \tag{3.10}$$

Majoration de l_2 L'expression de $l_2(x,z)$ est définie par (3.5).

Comme

$$\sum_{i=1}^{r} \left(\frac{dh_i(z(t))}{dt} \right) = 0,$$

avec $P_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, l_2 est équivalente à :

$$l_2(x,z) = x^T \left(\sum_{i=1}^{r} \left(\frac{dh_i(z(t))}{dt} \right) (P_i - P_0) \right) x.$$

De plus, seules les valeurs positives sont recherchées afin de majorer l_2, (3.5) peut donc être majorée par :

$$l_2(x,z) \leq \sum_{i=1}^{r} \left| \frac{dh_i(z(t))}{dt} \right| \left| x^T (P_i - P_0) x \right|.$$

Soit la matrice définie positive $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que :

$$-R \leq P_i - P_0 \leq R, \quad \forall i \in \{1,\dots,r\} \tag{3.11}$$

Avec $f(z) = \sum_{i=1}^{r} \left| \frac{dh_i(z(t))}{dt} \right| \in \mathbb{R}^+$, $l_2(x,z)$ peut être majorée par :

$$l_2(x,z) \leq x^T f(z) R x. \tag{3.12}$$

Finalement $\dot{V}(x,z) = l_1(x,z) + l_2(x,z)$ est majorée par :

$$\dot{V}(x,z) \leq x^T \left(M + \|H(z)\|^2 (S - M) + f(z)R \right) x \tag{3.13}$$

Cette majoration va permettre de définir les conditions de stabilité décrites dans le paragraphe suivant.

3.3.2. Analyse de la Stabilité et de la stabilisation

La stabilité asymptotique global du modèle flou de type T-S (1.2) est définie par le théorème suivant :

Théorème 3.3.1. *[Blanco et al., 2000] Considérons le modèle flou (1.2). Supposons qu'il existe un ensemble de matrices définies positives* $\{P_i,\ i \in \{1,\dots,r\}\}$*, une matrice définie positive* R*, une matrice définie négative* S *et deux matrices symétriques* $M, P_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *telles que :*

$$A_i^T P_i + P_i A_i < S \quad \forall i \in \{1,\dots,r\},$$
$$(A_j^T P_i + P_i A_j) + (A_i^T P_j + P_j A_i) \leq 2M, \quad \forall (i,j) \in \{1,\dots,r\}^2,\ j \neq i.$$
$$-R \leq P_i - P_0 \leq R, \quad \forall i \in \{1,\dots,r\}$$

et $h_i(z)$, $i \in \{1,\dots,r\}$ *qui satisfassent :*

$$M + \|H(z)\|^2 (S - M) + f(z)R \leq 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^p,$$

alors l'origine est globalement asymptotiquement stable.

La preuve est directe en utilisant les majorations des paragraphes précédents et le théorème de Lyapunov. La résolution de ces inégalités est faite à l'aide des outils LMIs présentés dans le §1.5.3.

Le problème de stabilisation est relativement proche du problème de stabilité. Le problème de résolution numérique est plus difficile, car dans ce cas le système d'équations est exprimé en terme d'inégalités bilinéaires matricielles (BMIs) qui ne possède pas encore d'algorithmes de résolution. Cependant l'extension à la stabilisation des modèles flous T-S est immédiate en utilisant différents types de commande.

- **Commande par retour d'état linéaire :**
  Ce cas est tout à fait similaire au problème de stabilité, et les matrices A_i sont remplacées par les expressions $A_i - B_i F_0$, avec F_0 gains du retour d'état, dans les inégalités du théorème 3.3.1.
- **Commande CDF dans le cas particulier** $\exists k_i > 0,\ B_i = k_i B$ **:**
  Ce cas est tout à fait similaire au problème de stabilité, et les matrices A_i sont remplacées par les expressions $A_i - B_i F_i$, avec F_i gains de la commande par retour d'état flou, dans les inégalités du théorème 3.3.1.
- **Commande PDC :**
  En considérant $M_{ijk} = (A_i - B_i K_j)^T P_k + P_k (A_i - B_i K_j)$, les inégalités (3.8) et (3.9) deviennent :

$$M_{iii} < S, \quad \forall i \in \{1,\dots,r\},$$
$$M_{iji} + M_{iij} + M_{jii} \leq 3M \quad \forall (i,j) \in \{1,\dots,r\}^2,\ j \neq i,$$
$$M_{ijk} + M_{ikj} + M_{jki} + M_{jik} + M_{kij} + M_{kji} \leq 6M \quad \forall (i,j,k) \in \{1,\dots,r\}^3,\ i \neq j \neq k.$$

  La majoration de $l_1(x,z)$ est alors définie par la nouvelle expression :

$$l_1(x,z) \leq x^T \left(M + \left(\sum_{i=1}^{r} h_i^3(x) \right) (S - M) \right) x.$$

et le théorème de stabilité global 3.3.1 est utilisé en prenant en compte ces nouvelles expressions.

3.4. Stabilité non quadratique des modèles flous T-S discrets

Le but de cette partie est de présenter de nouvelles conditions de stabilité et de stabilisation pour les modèles flous MIMO discrets, basées sur l'utilisation de l'approche de Lyapunov. La fonction candidate de Lyapunov est non quadratique et décrite par $V(x(t)) = x^T(t)\left[\sum_i h_i(z(t))\, P_i\right] x(t)$. Le modèle flou discret utilisé est celui décrit par (1.6). Notons que la fonction de Lyapunov se réduit en une fonction quadratique si on choisit $\forall i,\ P_i = P$, avec $\sum_i h_i(z(t)) = 1$. Le cas présenté se trouve donc dans un cadre plus général que dans [Tanaka *et al.*, 1998].

3.4.1. Analyse de la stabilité : 1ère approche

Les conditions de stabilité quadratique sont rappelées ci-dessous :

Théorème 3.4.1. *[Tanaka et Sugeno, 1992] Soit le modèle flou discret suivant :* $x(t+1) = \sum_i^r h_i(z(t))\, A_i(t)x(t)$

$$Si\ \exists\ P > 0\ telle\ que\ \forall i \quad A_i^T P A_i - P < 0 \tag{3.14}$$

alors le modèle flou est globalement asymptotiquement stable. □

Afin d'obtenir les conditions de stabilité dans le cas non quadratique, le lemme suivant est nécessaire :

Lemme 3.4.1. *Avec* P_i, P_j, P_k *trois matrices définies positives :*
si $A_j^T P_i A_j - P_j < 0$ *et* $A_k^T P_i A_k - P_k < 0$ *alors* $A_j^T P_i A_k + A_k^T P_i A_j - P_j - P_k < 0$

Proof. En prenant $(A_j - A_k)^T P_i (A_j - A_k) = A_j^T P_i A_j + A_k^T P_i A_k - A_j^T P_i A_k - A_k^T P_i A_j$ nous avons :

$$\begin{aligned} A_j^T P_i A_k + A_k^T P_i A_j & \\ -P_j - P_k \ &= \ -(A_j - A_k)^T P_i (A_j - A_k) \\ &\quad +A_j^T P_i A_j - P_j + A_k^T P_i A_k - P_k \\ &< \ -(A_j - A_k)^T P_i (A_j - A_k) \leq 0 \\ &\quad \text{car } P_i > 0 \end{aligned}$$

□

Le théorème suivant donne des conditions de stabilité dans le cas non quadratique :

Théorème 3.4.2. *Soit le modèle flou discret suivant :* $x(t+1) = \sum_i^r h_i(z(t))\, A_i(t)x(t)$

$$Si\ \exists\, P_i, P_j > 0\ i,j \in \{1 \dots r\}\ \ telles\ que\ \forall i,j \quad A_j^T P_i A_j - P_j < 0 \tag{3.15}$$

alors le modèle flou est globalement asymptotiquement stable. □

Proof. Avec $V(x(t)) = x^T(t) \sum_i h_i(z(t))\, P_i x(t)$ on a :

$$\begin{aligned}
\Delta V(x(t)) &= V(x(t+1)) - V(x(t)) \\
&= x^T(t) \left[\left(\sum_j h_j(z(t))\, A_j^T \right) \left(\sum_i h_i(z(t+1))\, P_i \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \left(\sum_k h_k(z(t))\, A_k \right) - \sum_i h_i(z(t))\, P_i \right] x(t)
\end{aligned}$$

pour alléger les expressions on pose $h_i(z(t+1)) = h_i^+$

$$\begin{aligned}
\Delta V(x(t)) &= x^T \left(\sum_j h_j A_j^T \sum_i h_i^+ P_i \sum_k h_k A_k - \sum_j h_j P_j \overbrace{\sum_i h_i^+}^{=1} \right) x \\
&= x^T \left(\sum_i h_i^+ \left(\sum_j h_j A_j^T P_i \sum_k h_k A_k - \sum_j h_j P_j \underbrace{\sum_k h_k}_{=1} \right) \right) x
\end{aligned}$$

$$= x^T \sum_i h_i^+ \left(\sum_j \sum_k h_j h_k \left(A_j^T P_i A_k - P_j \right) \right) x$$

$$= x^T \sum_i h_i^+ \left(\sum_j h_j^2 \left(A_j^T P_i A_j - P_j \right) + \sum_j \sum_{k>j} h_j h_k \left(A_j^T P_i A_k - P_j + A_k^T P_i A_j - P_k \right) \right) x$$

D'après le lemme 3.4.1 et sous les conditions (3.15) $\Delta V(x(t)) < 0$. □

3.4.1.1. Propriétés de l'approche non quadratique

La propriété suivante montre que les conditions de stabilité quadratique sont un cas particulier des conditions de stabilité non quadratique.

Propriété 3.4.1. *Supposons qu'il existe un ensemble de matrices* $P_i > 0$ *solutions des inégalités (3.15).*
Si $\exists P_i \quad / \quad \forall j \quad P_i - P_j \geq 0$ *alors* P_i *est solution des conditions de stabilité quadratique (3.14). Dans le cas contraire, les conditions de stabilité quadratique ne peuvent pas être vérifiées, i.e.* $\nexists P \quad A_i^T P A_i - P < 0$.

Proof. Si $\exists P_i / \forall j \quad P_i - P_j \geq 0$ alors :

$$A_j^T P_i A_j - P_i = \underbrace{A_j^T P_i A_j - P_j}_{<0} + \underbrace{P_j - P_i}_{<0} < 0$$

et P_i est solution des conditions de stabilité quadratique.

Dans le cas contraire, en raisonnant par l'absurde, s'il existe une matrice $P > 0$ telle que $A_i^T P A_i - P < 0$, alors de façon évidente $\forall i,\ P_i = P$ sont solutions du théorème 3.4.2, ce qui est en contradiction avec le fait $\nexists P_i$ telles que $\forall j, P_i - P_j \geq 0$. □

Exemple : Considérons le cas ou $r = 2$.

C.S. de Tanaka : $A_1^T P A_1 - P < 0$ et $A_2^T P A_2 - P < 0$

C.S. de (3.15) :

$$A_1^T P_1 A_1 - P_1 < 0 \tag{3.16}$$
$$A_2^T P_1 A_2 - P_2 < 0 \tag{3.17}$$
$$A_1^T P_2 A_1 - P_1 < 0 \tag{3.18}$$
$$A_2^T P_2 A_2 - P_2 < 0 \tag{3.19}$$

- Si d'après [Tanaka et Sugeno, 1992] $\exists P$, il suffit de prendre $P_1 = P_2 = P$ et le théorème 3.4.2 est vérifié.
- Si le théorème 3.4.2 est vérifié,
  $P = P_1$ et $P_1 < P_2$ donne $A_1^T P_1 A_1 - P_1 < 0$ équation (3.16),
  $P = P_1$ et $P_1 < P_2$ donne $A_2^T P_1 A_2 - P_2 < P_2 - P_1$ équation (3.17),
  $P = P_2$ et $P_1 > P_2$ donne $A_2^T P_2 A_2 - P_2 < 0$ équation (3.19),
  $P = P_2$ et $P_1 > P_2$ donne $A_1^T P_2 A_1 - P_1 < P_1 - P_2$ équation (3.18).
- Si $P_1 - P_2$ n'est ni positive ni négative (par exemple : $P_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} > 0$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} > 0$ et $P_1 - P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ni positive, ni négative, alors, ni P_1, ni P_2 ne sont solution des conditions de [Tanaka et Sugeno, 1992].

Cette propriété illustre le fait que la stabilité quadratique est incluse dans la stabilité non quadratique, ce qui était évidemment attendu puisqu'on se ramène à la stabilité quadratique avec $\forall i\ P_i = P$. Néanmoins, cette propriété montre clairement les propriétés que vérifient les matrices P_i dans les cas où les conditions de stabilité quadratiques ne sont pas vérifiées.

Bien que le nombre de conditions soit plus important, r^2 à la place de r dans le cas de [Tanaka et Sugeno, 1992], des exemples simples, comme celui du paragraphe suivant, permettent de mettre en évidence les avantages de cette approche.

3.4.1.2. Exemple

Considérons le système non linéaire décrit pas le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1(t+1) & = & -0,45x_1(t) - 0,18x_2(t) + \frac{1}{\pi}\arctan(x_1(t))(0,9x_1(t) - 0,36x_2(t)) \\ x_2(t+1) & = & 0,5x_1(t) + 0,025x_2(t) + \frac{1}{\pi}\arctan(x_1(t))(x_1(t) - 1,65x_2(t)) \end{array} \right. \tag{3.20}$$

En réécrivant $\arctan(x_1)$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} \arctan(x_1) & = & \left(-\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x_1)\right) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan(x_1)\right)\right)\frac{\pi}{2} \\ & = & l_1 h_1 + l_2 h_2 \end{array}$$

avec les fonctions d'appartenance $F_1^1(x_1(t)) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x_1)\right)$ et $F_2^1(x_1(t)) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan(x_1)\right)$, le modèle flou à deux règles suivant représente exactement le modèle non linéaire (3.20) :

Si $x_1(t)$ est $F_1^1(x_1(t))$ alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1(t+1) & = & -0,9x_1(t) \\ x_2(t+1) & = & 0,85x_2(t) \end{array} \right.$$

Si $x_1(t)$ est $F_2^1(x_1(t))$ alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1(t+1) & = & -0,36x_1(t) \\ x_2(t+1) & = & x_1(t) - 0,8x_2(t) \end{array} \right. .$$

La stabilité quadratique ne peut être démontrée, i.e. $\nexists P$ qui vérifie les conditions de stabilité de [Tanaka *et al.*, 1998]. Un résultat en stabilité non quadratique est donné par :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 4,34817 & 0,04312 \\ 0,04312 & 1,61152 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2,8858 & -0,93287 \\ -0,93287 & 1,82830 \end{bmatrix}$$

Pour illustrer la propriété 3.4.1, remarquons que les valeurs propres de $P_1 - P_2$ sont :

$$\lambda_{P_1 - P_2} = \begin{bmatrix} 1,9102 \\ -0,6646 \end{bmatrix}.$$

Afin de montrer l'apport de l'utilisation de la fonction de Lyapunov non quadratique en terme de stabilité, il est alors possible de représenter de manière graphique les équipotentielles de la fonction de Lyapunov.

Les courbes équipotentielles de Lyapunov consistent à représenter l'état du système telle que la fonction la fonction de Lyapunov $V(x(t)) = \sum_i h_i(z)\, x^T P_i x$ soit constante en fonction des variables d'état. Les courbes de "niveaux" ainsi obtenues décrivent les zones de l'espace d'état d'équi-énergie. Contrairement au cas quadratique les courbes décrites ne sont pas des ellipses et peuvent, comme c'est le cas ici, ne pas être convexes, figure 3.2. La seconde courbe figure 3.2 décrit une trajectoire de l'état avec comme conditions

initiales $x_0 = [-20 \ -30]^T$, et les figures 3.3 et 3.4 donnent, pour ces conditions initiales, l'évolution temporelle pour les variables d'état et pour la fonction de Lyapunov.

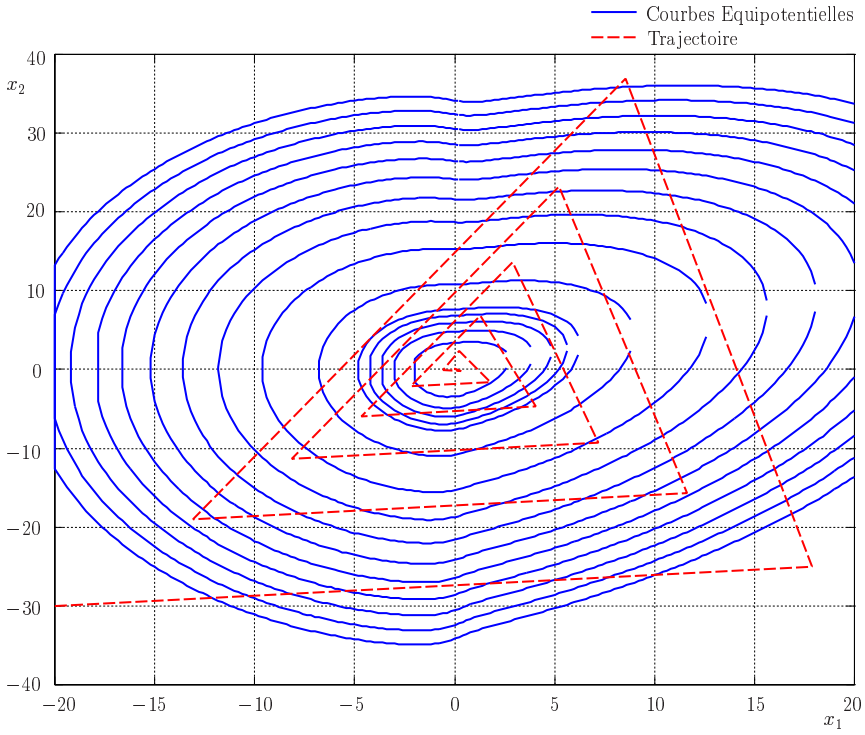


Figure 3.2. : Représentation des équipotentielles de Lyapunov

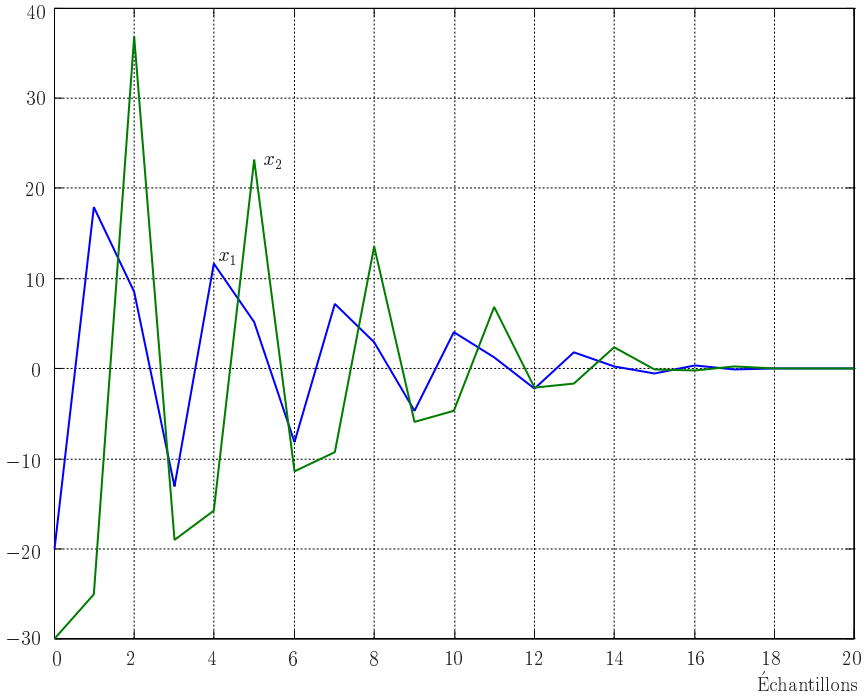


Figure 3.3. : Représentation des variables d'état du système avec les CI $x_0 = [-20 \ -30]^T$

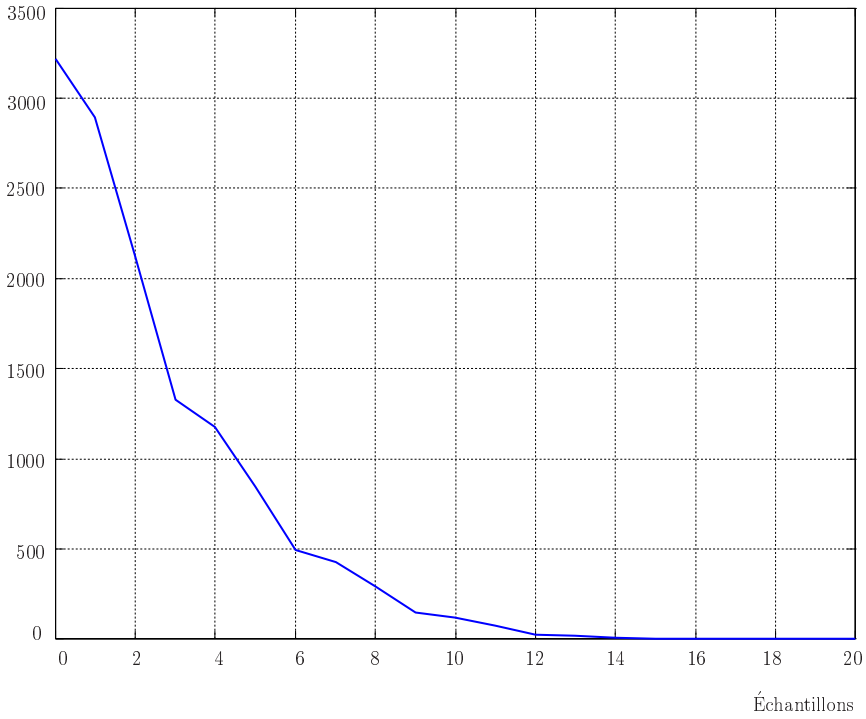


Figure 3.4. : Fonction de Lyapunov $V(x(t)) = \sum_i h_i(z)\, x^T P_i x$, $x_0 = [-20 \;\; -30]^T$

3.4.2. Analyse de la stabilité : 2ème approche

La manière de procéder est issue des travaux de [de Oliveira *et al.*, 1999], où l'on considère le système linéaire incertain discret suivant :

$$x(t+1) = A(\alpha)\, x(t) \tag{3.21}$$

où les matrices dynamiques $A(\alpha)$ appartiennent à un ensemble polytopique convexe défini par $\mathcal{A} := \left\{ A(\alpha) :\; A(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i,\; \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1,\; \alpha_i \geq 0 \right\}$. En utilisant la stabilité de Lyapunov le lemme suivant décrit les conditions de stabilité du système incertain.

Lemme 3.4.2. *[de Oliveira* et al.*, 1999] Le système incertain (3.21) est stable de façon robuste dans le domaine incertain si et seulement si il existe une matrice $P(\alpha) = P^T(\alpha) > 0$ tel que*

$$A^T(\alpha)\, P(\alpha)\, A(\alpha) - P(\alpha) < 0$$

pour tout α tel que $A(\alpha) \in \mathcal{A}$.

Comme il n'y a pas de moyen systématique pour définir les matrices $P(\alpha)$, une manière de résoudre le problème est de se ramener à la recherche d'une seule matrice de Lyapunov $P(\alpha) = P$ par inégalité matricielle (LMIs). Les résultats obtenus sont évidemment conservatifs, le lemme suivant donne les conditions de stabilité quadratique :

Lemme 3.4.3. *[de Oliveira et al., 1999] Le système incertain (3.21) est stable de façon robuste dans le domaine incertain s'il existe une matrice $P > 0$ telle que*

$$A_i^T P A_i - P < 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\}.$$

Le théorème principal décrit dans les travaux de [de Oliveira *et al.*, 1999] est le suivant :

Théorème 3.4.3. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) il existe une matrice symétrique $P > 0$ telle que $A^T P A - P < 0$.

(ii) il existe une matrice symétrique P et une matrice G telles que

$$\begin{bmatrix} P & A^T G^T \\ GA & G + G^T - P \end{bmatrix} > 0. \tag{3.22}$$

□

La condition (ii) découle directement d'une extension de la condition (i) via le complément de Schur en introduisant un nouvelle matrice G. Notons que la condition $P > 0$ est directement issue du premier bloc de (3.22) et que G n'est pas une matrice symétrique.

Ceci permet d'écrire de nouvelles conditions suffisantes pour le système incertain :

Théorème 3.4.4. *[de Oliveira et al., 1999] Le système incertain (3.21) est stable de façon robuste dans le domaine incertain s'il existe un ensemble de matrices P_i et une matrice G telle que*

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i^T G^T \\ GA_i & G + G^T - P_i \end{bmatrix} > 0$$

pour tout $i = \{1, \ldots, N\}$. □

La similitude avec les modèles flous TS va permettre d'envisager une autre écriture pour les conditions de stabilité non quadratiques. En considérant toujours la fonction de Lyapunov non quadratique définie par :

$$V(x(t)) = x^T(t) \left[\sum_i h_i(z(t)) P_i \right] x(t)$$

on peut déduire le théorème de stabilité suivant :

Théorème 3.4.5. *Soit le système flou T-S discret $x(k+1) = \sum_i^r h_i(z(t)) A_i(t) x(t)$. S'il existe des matrices symétriques P_i et des matrices G_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$ telles que :*

$$\forall i, j \quad \begin{bmatrix} P_i & A_i^T G_j^T \\ G_j A_i & G_j + G_j^T - P_j \end{bmatrix} > 0 \tag{3.23}$$

alors le modèle flou est globalement asymptotiquement stable. □

Proof. Considérons la fonction de Lyapunov non quadratique $V(x(t))$ suivante définie par $V(x(t)) = x^T(t)\sum_i h_i(z(t))P_i x(t)$ et en posant $h_i(z(t+1)) = h_i^+$, pour que le système soit stable il est nécessaire de vérifier $\Delta V(x(t)) < 0\ \forall x(t) \neq 0$. Avec :

$$\begin{aligned}\Delta V(x(t)) &= V(x(t+1)) - V(x(t)) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{r} h_i A_i x(t)\right)^T \left(\sum_{i=1}^{r} h_i^+ P_i\right)\left(\sum_{i=1}^{r} h_i A_i x(t)\right) - x^T(t)\sum_{i=1}^{r} h_i P_i x(t)\end{aligned}$$

En utilisant :

$$\text{Si } \forall i,j \begin{bmatrix} P_i & A_i^T G_j^T \\ G_j A_i & G_j + G_j^T - P_j \end{bmatrix} > 0 \text{ alors } \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i h_j^+ \begin{bmatrix} P_i & A_i^T G_j^T \\ G_j A_i & G_j + G_j^T - P_j \end{bmatrix} > 0$$

d'où

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{r} h_i P_i & \left(\sum_{i=1}^{r} h_i A_i^T\right)\left(\sum_{i=1}^{r} h_j^+ G_j^T\right) \\ \left(\sum_{i=1}^{r} h_j^+ G_j\right)\left(\sum_{i=1}^{r} h_i A_i\right) & \sum_{i=1}^{r} h_j^+ \left(G_j + G_j^T - P_j\right) \end{bmatrix} > 0 \tag{3.24}$$

En multipliant à gauche par $\begin{bmatrix} I & -\sum_{i=1}^{r} h_i A_i^T \end{bmatrix}$ et à droite par $\begin{bmatrix} I \\ -\sum_{i=1}^{r} h_i A_i \end{bmatrix}$, et en posant $G = \sum_{i=1}^{r} h_j^+ G_j^T$ l'expression (3.24) devient :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r} h_i P_i - \left(\sum_{i=1}^{r} h_i A_i^T\right)\left(\sum_{i=1}^{r} h_i G A_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{r} h_i A_i^T G^T\right)\left(\sum_{i=1}^{r} h_i A_i\right) \\ + \left(\sum_{i=1}^{r} h_i A_i^T\right)\left(G + G^T\right)\left(\sum_{i=1}^{r} h_i A_i\right) \\ - \left(\sum_{i=1}^{r} h_i A_i^T\right)\left(\sum_{i=1}^{r} h_j^+ P_j\right)\left(\sum_{i=1}^{r} h_i A_i\right) &= -\Delta V(x(t)) > 0\end{aligned}$$

□

Remarque 3.4.1. Dans [de Oliveira *et al.*, 1999], le système utilisé est décrit par $x(t+1) = A(\alpha)x(t)$, la différence principale avec un modèle flou TS est que $A(\alpha)$ ne dépend pas du temps. On retrouve les conditions décrites dans [de Oliveira *et al.*, 1999], en utilisant h_j à la place de h_j^+(ce qui indique que les h_i sont indépendantes du temps). Comme il est évidemment impossible de déterminer la valeur des h_j^+ par rapport à la valeur aux instants précédents h_j, il est donc nécessaire de vérifier r^2 conditions.

3.4.2.1. Exemple

Considérons le modèle flou décrit par les deux règles suivantes issu du modèle non linéaire du §3.4.1.2 :

Si $x_1(t)$ est $F_1^1(x_1(t))$ alors

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= -0,9x_1(t) \\ x_2(t+1) &= ax_2(t) \end{cases}$$

Si $x_1(t)$ est $F_2^1(x_1(t))$ alors

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= -0,36x_1(t) \\ x_2(t+1) &= x_1(t) - 0,8x_2(t) \end{cases}.$$

En utilisant les conditions du théorème 3.4.5, on peut démontrer la stabilité jusqu'à $a = 0,8896$ avec les matrices d'états suivantes :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0,36 \\ 1 & -0,8 \end{bmatrix}.$$

On retrouve la propriété 3.4.1, par exemple dans le cas où $a = 0,86$ on obtient :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 248,04 & -2,43 \\ -2,43 & 91,22 \end{bmatrix},\ P_2 = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 185,01 & -45,06 \\ -45,06 & 100,72 \end{bmatrix}$$

et

$$G_1 = \begin{bmatrix} 72,97 & -2,72 \\ -2,30 & 29,39 \end{bmatrix},\ G_2 = \begin{bmatrix} 51,99 & -7,51 \\ -15,21 & 33,60 \end{bmatrix}$$

Pour illustrer la propriété , remarquons que les valeurs propres de $P_1 - P_2$ sont :

$$\lambda_{P_1-P_2} = \begin{bmatrix} 35,64 \\ -9,27 \end{bmatrix}.$$

Pour la stabilité, deux approches ont été décrites qui permettent d'étendre les conditions de stabilité du cas quadratique. Les avantages et inconvénients des deux approches vont apparaître dans le paragraphe suivant traitant de la stabilisation.

3.5. Stabilisation non quadratique

On s'intéresse dans cette partie à la stabilisation non quadratique des modèles flous, en utilisant des lois de commande de type PDC et/ou CDF.

3.5.1. 1ère approche

Considérons le modèle flou en boucle fermée suivant :
$x(t+1) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))(A_i(t)x(t) + B_i u(t))$ en utilisant une loi de commande PDC :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{r} h_i F_i x(t) \tag{3.25}$$

le modèle en boucle fermée s'écrit :

$$x(t+1) = \left(\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) A_i - \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} h_i(z(t)) h_j(z(t)) B_i F_j \right) x(t) \tag{3.26}$$

Les conditions de stabilisation sont données dans le théorème suivant :

Théorème 3.5.1. *Le modèle en boucle fermée (3.26) est globalement asymptotiquement stable si* $\exists\, P_i > 0$ *et* F_i, $\forall i \in \{1 \dots r\}$ *telles que :*

$$\begin{cases} G_{ii}^T P_m G_{ii} - P_i < 0 \quad \forall i, m \in \{1 \dots r\}, \\ 2\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right)^T \cdot P_m \cdot \left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right) - P_i - P_j < 0 \quad j > i,\ \forall i, m \in \{1 \dots r\}. \end{cases} \tag{3.27}$$

□

Proof. Avec $\Delta V(x(t)) = V(x(t+1)) - V(x(t))$ il vient, toujours avec $h_i(z(t+1)) = h_i^+$:

$$\begin{aligned} \Delta V(x(t)) &= x^T \left(\sum_m h_m^+ \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l h_i h_j h_k h_l (A_i - B_i F_j)^T P_m (A_k - B_k F_l) \right. \\ &\quad \left. - \sum_i h_i P_i \right) x \end{aligned}$$

En posant $G_{ij} = A_i - B_i F_j$ après quelques manipulations simples :

$$\begin{aligned} \Delta V(x(t)) &\leq x^T \left(\frac{1}{4} \sum_m h_m^+ \left(\sum_i \sum_j h_i h_j (G_{ij} + G_{ji})^T P_m (G_{ij} + G_{ji}) - 4 \sum_i h_i P_i \right) \right) x \\ &= x^T \left(\sum_m h_m^+ \left(\sum_i \sum_j h_i h_j \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P_m \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - \sum_i h_i P_i \right) \right) x \\ &= x^T \left(\sum_m h_m^+ \sum_i h_i^2 \left(G_{ii}^T P_m G_{ii} - P_i \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_m h_m^+ \sum_i \sum_{j>i} h_i h_j \left(2 \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P_m \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - P_i - P_j \right) \right) x \end{aligned}$$

□

Le problème de résolution numérique est ici plus difficile, car le système d'équations (3.27) est exprimé en terme d'inégalités bilinéaires matricielles (BMIs) qui ne possède pas encore d'algorithmes de résolution efficaces. Néanmoins, en utilisant une CDF dans le cas particulier $\forall i,\ B_i = k_i B$ et $k_i > 0$, il est possible d'obtenir un problème sous forme de LMIs.

3.5.1.1. Stabilisation dans un cas particulier

Dans le cas particulier : $\forall i,\ B_i = k_i B$ et $k_i > 0$, et en utilisant une loi CDF, on rappelle que le modèle en boucle fermée s'écrit [Guerra *et al.*, 1999; Guerra et Vermeiren, 2000] :

$$x(t+1) = \sum_i h_i(z(t)) (A_i - B_i F_i) x(t) \tag{3.28}$$

Avec une fonction de Lyapunov non quadratique les conditions de stabilisation sont résumées dans le théorème suivant qui est directement issu du théorème 3.4.2.

Théorème 3.5.2. *Le modèle en boucle fermée (3.28) est globalement asymptotiquement stable si* $\exists\, P_i,\ P_j > 0$ *et* $F_i,\ i,\ j \in \{1 \dots r\}$ *telles que :*

$$\forall i,\ j\ \ (A_i - B_i F_i)^T P_j (A_i - B_i F_i) - P_i < 0. \tag{3.29}$$

□

L'intérêt de ce cas particulier, est l'obtention d'un problème LMI. Effectivement, après multiplication par P_i^{-1} à droite et à gauche il vient :

$$\left(P_i^{-1} A_i^T - P_i^{-1} F_i^T B_i^T\right) P_j \left(A_i P_i^{-1} - B_i F_i P_i^{-1}\right) - P_i^{-1} < 0 \tag{3.30}$$

En utilisant le complément de Schur [El Ghaoui, 1997], avec $X_i = P_i^{-1}$ et $M_i = F_i P_i^{-1} = F_i X_i$, (3.30) devient :

$$\forall\, i,\ j \qquad \begin{bmatrix} X_i & X_i A_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i X_i - B_i M_i & X_j \end{bmatrix} > 0 \tag{3.31}$$

Cette première approche a permis de proposer de nouvelles conditions de stabilisation non quadratiques. Néanmoins la formulation LMI ne semble possible que dans un cas particulier de modèles flous discrets et en utilisant une loi de commande de type CDF. Un exemple à la fin de ce chapitre montre l'apport dans ce cas des nouvelles conditions.

Le paragraphe suivant utilise la deuxième approche qui va permettre de donner une solution de type LMI au cas général des modèles flous discrets utilisant une PDC.

3.5.2. 2ème approche

Le but de cette seconde approche est de présenter de nouvelles conditions de stabilisation pour les modèles flous MIMO discrets en se basant sur l'approche décrite dans [de Oliveira *et al.*, 1999]. Elle se place dans le cadre de l'utilisation d'un fonction candidate de Lyapounov non quadratique (3.3) et d'une loi de commande PDC pour la stabilisation. La particularité de cette méthode est l'introduction d'une matrice G quelconque dans les conditions de stabilité. Elle permet donc un degré de liberté supplémentaire pour la résolution des inégalités de stabilisation.

Le théorème suivant permet de donner les conditions de stabilisation dans le cas non quadratique pour un modèle flou TS associé à une loi PDC.

Théorème 3.5.3. *Soit le système flou T-S discret :* $x(k+1) = \sum_i^r h_i(z(t)) (A_i(t) x(t) + B_i u(t))$ *avec la loi de commande PDC,* $u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i F_i x(t)$. *S'il existe un ensemble de matrices symétriques* P_i, *une matrice* G *et des gains de commande* F_i *tels que :*

$$\forall i, k \begin{bmatrix} P_i & G_{ii}^T G^T \\ G G_{ii} & G + G^T - P_k \end{bmatrix} > 0, \tag{3.32}$$

$$\forall j > i, k \begin{bmatrix} P_i + P_j & (G_{ij} + G_{ji})^T G^T \\ G(G_{ij} + G_{ji}) & 2\left(G + G^T - P_k\right) \end{bmatrix} > 0, \tag{3.33}$$

avec $G_{ij} = (A_i - B_i F_j)^T$, *alors le modèle flou est globalement asymptotiquement stable.*

□

Proof. Considérons la fonction de Lyapunov non quadratique $V(x(t))$ suivante définie par $V(x(t)) = x^T(t)\sum_i h_i(z(t))P_i x(t)$. La démonstration est basée sur l'utilisation du théorème 3.4.5 dans sa version transposée, ceci est du au fait de pouvoir obtenir les produits GF_i^T qui permettent une mise sous forme LMI. En posant $h_i(z(t+1)) = h_i^+$, et $G_{ij} = (A_i - B_i F_j)^T$

$$\Phi_{kii} = \begin{bmatrix} P_i & G_{ii}^T G^T \\ G G_{ii} & G + G^T - P_k \end{bmatrix}, \ \Phi_{kij} = \begin{bmatrix} P_i + P_j & (G_{ij} + G_{ji})^T G^T \\ G(G_{ij} + G_{ji}) & 2\left(G + G^T - P_k\right) \end{bmatrix}$$

si les inégalités (3.33) et (3.32) sont vérifiées alors l'expression suivante est vérifiée :

$$\sum_k h_k^+ \left(\sum_i h_i^2 \Phi_{kii} + \sum_i \sum_{j>i} h_i h_j \Phi_{kij} \right) > 0$$

et est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} \sum_i h_i P_i & \alpha_{ij}^T G^T \\ G\alpha_{ij} & G + G^T - \sum_k h_k^+ P_k \end{bmatrix} > 0 \tag{3.34}$$

avec $\alpha_{ij} = \sum_i h_i^2 G_{ii} + \sum_i \sum_{j>i} h_i h_j (G_{ij} + G_{ji}) = \sum_i \sum_j h_i h_j G_{ij}$.

En multipliant à gauche par $\begin{bmatrix} I & -\alpha_{ij}^T \end{bmatrix}$ et à droite par $\begin{bmatrix} I \\ -\alpha_{ij} \end{bmatrix}$, l'expression (3.34) devient :

$$\sum_i h_i P_i - \alpha_{ij}^T G^T \alpha_{ij} - \alpha_{ij}^T G \alpha_{ij} + -\alpha_{ij}^T \left(G + G^T\right) \alpha_{ij} - \alpha_{ij}^T \sum_k h_k^+ P_k \alpha_{ij} = -\Delta V(x(t)) > 0$$

□

Remarque 3.5.1. Ces conditions peuvent être facilement décrites par des expressions LMIs en effectuant le changement de variable $M_i = GF_i^T$. Les conditions LMIs obtenues sont alors les suivantes :

$$\forall i,k \ \begin{bmatrix} P_i & A_i G^T - B_i M_i \\ G A_i^T - M_i^T B_i^T & G + G^T - P_k \end{bmatrix} > 0,$$

$$\forall j > i,k \ \begin{bmatrix} P_i + P_j & A_i G^T + A_j G^T - B_i M_j - B_j M_i \\ G A_i^T + G A_j^T - M_j^T B_i^T - M_i^T B_j^T & 2\left(G + G^T - P_k\right) \end{bmatrix} > 0,$$

Puis $F_i = M_i^T G^{-T}$. Notons que $P_i > 0$ est assurée par les premiers blocs des matrices et que la régularité de G est assurée par le dernier bloc puisque $G + G^T > P_k > 0$. Notons également que le nombre de LMIs utilisées passe de $\frac{r(r+1)}{2}$ dans le cas quadratique à $\frac{r^2(r+1)}{2}$.

Remarque 3.5.2. Dans le cas de la stabilisation, on ne peut pas, a priori, utiliser plusieurs matrices G_i car la mise sous forme d'un problème LMI ne semble pas possible. Effectivement, il est nécessaire de poser $M_{ij} = G_i F_j^T$ et cette transformation ne permet plus d'obtenir les F_j, i.e. rien ne garantit que $M_{1j}^T G_1^{-T} = M_{2j}^T G_2^{-T}$.

Remarque 3.5.3. On retrouve les mêmes propriétés de réduction du nombre de LMIs dans les cas particuliers de modèles flous. Si les matrices d'entrée vérifient $\forall i\ \exists k_i > 0,\ B_i = k_i B$, en utilisant une loi de commande de type CDF au lieu d'une PDC, seules les LMIs (3.32) sont nécessaires, le nombre de LMIs est alors r^2 (r dans le cas quadratique).

3.6. Principe de séparation

Le dernier intérêt de cette approche non quadratique, est l'extension du principe de séparation du cas quadratique. Rappelons que dans le cas quadratique, il existe un théorème de séparation entre un observateur flou dont les variables de prémisse sont mesurables et une loi de commande de type PDC [Ma *et al.*, 1998], CDF [Guerra et Vermeiren, 1998] et SSF [Vermeiren, 1998].

Dans ce cas, l'observateur utilise les mêmes variables de prémisse que le modèle flou et s'écrit de la manière suivante :

Règle i de l'observateur :
Si $z_1(t)$ est F_1^i et $z_2(t)$ est F_2^i ... et $z_p(t)$ est F_p^i

$$\text{Alors} \begin{cases} \hat{x}(t+1) = A_i\hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_i\hat{x}(t) \end{cases}, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Après quelques manipulations, en utilisant une loi de commande PDC, on s'intéresse à la stabilité du système complet suivant :

$$x(t+1) = \sum_i \sum_j h_i h_j \left(A_i - B_i F_j\right) x(t) + \sum_i \sum_j h_i h_j B_i F_j \tilde{x}(t) \tag{3.35}$$

$$\tilde{x}(t+1) = \sum_i \sum_j h_i h_j \left(A_i - K_j C_i\right) \tilde{x}(t)$$
$$\text{avec } \tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{3.36}$$

La seule différence avec [Ma *et al.*, 1998] est le remplacement de $V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$ par $V(x(t)) = x^T(t) \sum_i h_i P_i x(t)$. Comme cette dernière fonction de Lyapunov vérifie les même propriétés, i.e., il existe des réels c_1, c_2 et c_3 tels que $c_1 \|x\|^2 \leq V \leq c_2 \|x\|^2$, $\Delta V \leq -c_3 \|x\|^2$, le théorème de séparation reste donc valable.

Cela est vrai aussi bien pour la première approche que pour la deuxième. Enfin, on peut aussi aisément, pour la partie observateur, remplacer la fonction de Lyapunov quadratique $V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}^T(t) P \tilde{x}(t)$ par une fonction de Lyapunov non quadratique et conserver cette propriété.

3.7. Exemples

Cette partie illustre les propriétés obtenues précédemment à l'aide de deux exemples. Ils ont été construits en premier lieu pour montrer l'apport l'approche non quadratique.

Un des exemples concerne le cas particulier $\forall i\ \exists k_i > 0,\ B_i = k_i B$, qui illustre le fait que les problèmes LMIs, (3.31) issu de la première approche et (3.32) issu de la deuxième approche ne sont pas équivalents, ce qui justifie de garder dans ce cas la première approche. Le deuxième exemple quant à lui étant dans le cas général, il permet de justifier la deuxième approche.

3.7.1. Exemple 1

Considérons le modèle non linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1(t+1) & = & x_1(t) + x_2(t) + 2x_3(t) + x_1(t)\,x_2(t) + x_1(t)\,x_3(t) + (3 - 2x_1(t))\,u(t) \\ x_2(t+1) & = & -\frac{x_1(t)}{2} + \frac{x_2(t)}{2} + \frac{x_1^2(t)}{2} - \frac{x_1(t)x_2(t)}{2} + x_1(t)\,x_3(t) \\ x_3(t+1) & = & x_1(t) + 3(3 - 2x_1(t))\,u(t) \\ y(t) & = & x_1(t) \end{array}\right. \tag{3.37}$$

Avec $x_1 \in [-a, a]$, $z(t) = x_1(t)$, et le vecteur d'état : $x(t) = [x_1(t)\ x_2(t)\ x_3(t)]^T$, le modèle flou à deux règles suivant représente exactement le modèle non linéaire (3.37) avec $F_1(t) = \frac{x_1(t)+a}{2a}$ et $F_2(t) = \frac{a-x_1(t)}{2a}$:

Si $x_1(t)$ est $F_1^1(x_1(t))$ alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t+1) & = & \begin{bmatrix} 1 & 1+a & 2+a \\ \frac{a-1}{2} & \frac{a-1}{2} & a \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \\ & & + \begin{bmatrix} 3-2a \\ 0 \\ 3(3-2a) \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{array}\right.$$

Si $x_1(t)$ est $F_2^1(x_1(t))$ alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t+1) & = & \begin{bmatrix} 1 & 1-a & 2-a \\ -\frac{a+1}{2} & \frac{a+1}{2} & -a \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \\ & & + \begin{bmatrix} 3+2a \\ 0 \\ 3(3+2a) \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{array}\right.$$

Et pour des raisons évidentes de commandabilité : $a < \frac{3}{2}$. En utilisant une loi de commande de type PDC sur ce modèle flou et les conditions de stabilité [Tanaka *et al.*, 1998], la stabilisation peut-être démontrée si $a \leq 0,653$. En utilisant les conditions relâchées [Tanaka *et al.*, 1998], ce domaine est étendu à $a \leq 0,802$.

Notons que $B_2 = kB_1$, avec $k = \frac{3+2a}{3-2a} > 0$, une loi de commande du type CDF est donc applicable. Dans ce cas le domaine de stabilité est étendu à $a \leq 0,996$ en utilisant une approche quadratique.

Enfin, pour l'application de la stabilité non quadratique, la deuxième approche ne permet pas d'étendre ce domaine (3.32), alors que la première approche (3.31) qui est applicable dans ce cas permet de l'étendre à $a \leq 1,035$. Notons, par exemple pour $a = 1$, que la proposition est vérifiée puisque la solution LMI obtenue donne :

$$P_1 = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0,2342 & 0,1935 & 0,5039 \\ 0,1935 & 0,6577 & 0,6143 \\ 0,5039 & 0,6143 & 1,8079 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 1,1549 & -0,8455 & 1,3472 \\ -0,8455 & 0,7934 & -1,0064 \\ 1,3472 & -1,0064 & 1,7661 \end{bmatrix}$$

et les valeurs propres de $P_1 - P_2$ sont : $10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0,0860 & 1,5815 & -2,6822 \end{bmatrix}^T$.

La sortie étant $x_1(t)$, les prémisses de l'observateur flou ne dépendent que d'une variable mesurée. On peut donc utiliser le théorème de séparation. Les résultats sont présentés figures 3.5 et 3.6. Les conditions initiales pour les simulations sont données par $x(0) = [0,5\ 0,1\ 0]^T$et $\hat{x}(0) = [0,5\ 0\ 0]^T$, x_1 étant mesurable on a $x_1(0) = \hat{x}_1(0)$.

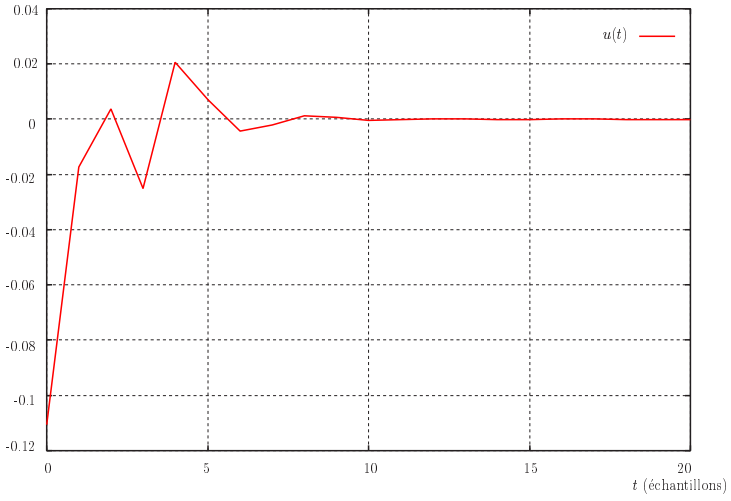


Figure 3.5. : Résultat en simulation : commande du système complet avec $x(0) = [0,5\ 0,1\ 0]^T$ et $\hat{x}(0) = [0,5\ 0\ 0]^T$.

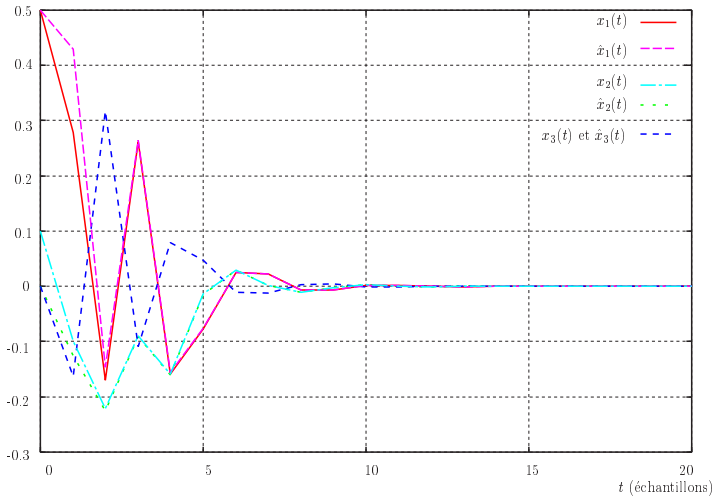


Figure 3.6. : Résultat en simulation : variables d'état (système + observateur) du système complet avec $x(0) = [0,5\ 0,1\ 0]^T$ et $\hat{x}(0) = [0,5\ 0\ 0]^T$

3.7.2. Exemple 2

Considérons le modèle flou à deux règles suivant utilisant les fonctions d'appartenance $F_1^1(x_1(t)) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x_1)\right)$ et $F_2^1(x_1(t)) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan(x_1)\right)$:

Si $x_1(t)$ est $F_1^1(x_1(t))$ alors

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} -0,1 & 1 \\ 0,25 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0,65 \\ 0,2 \end{bmatrix} u(t)$$

Si $x_1(t)$ est $F_2^1(x_1(t))$ alors

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} -1 & -0,5 \\ -0,75 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0,05 \end{bmatrix} u(t)$$

Dans le cas quadratique, les conditions de stabilité [Tanaka *et al.*, 1998] ne donnent pas de résultats. Notons de plus, que même dans le cas d'une loi CDF, en utilisant les relaxations décrites au chapitre 2, équations (2.8) et (2.9), il n'est pas possible de déterminer une solution à ce problème. Enfin, étant donné qu'il n'y a pas dépendance linéaire entre B_1 et B_2, la première approche ne peut pas être utilisée. Pour cet exemple, seule la deuxième approche permet de déterminer une solution pour ce modèle flou. En utilisant (3.32) et (3.33) un résultat est donné par :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 35,34 & -152,61 \\ -152,61 & 673,22 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 28,76 & -92,71 \\ -92,71 & 312,70 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 42,25 & -157,50 \\ -163 & 642,36 \end{bmatrix},$$

et les valeurs propres de $P_1 - P_2$ sont : $[-3,28\ 370,38]^T$.

Les conditions initiales pour les simulations sont données par $x(0) = [0,2\ \ -0,1]^T$.

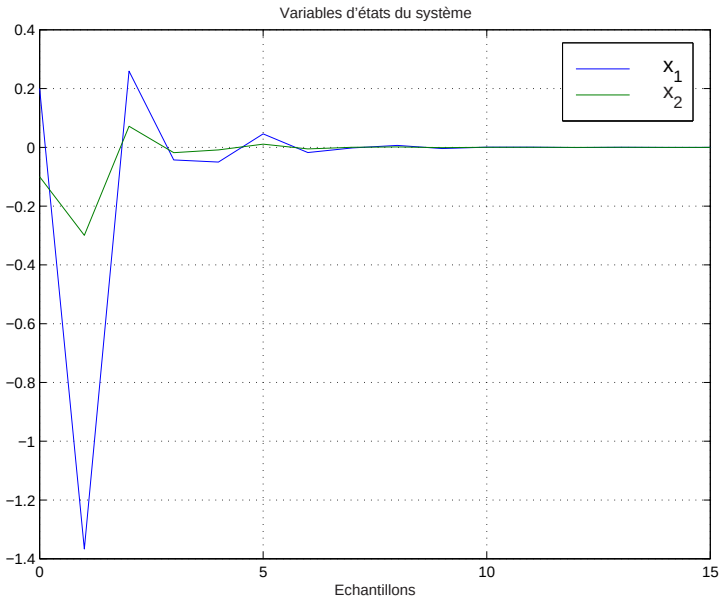


Figure 3.7. : Représentation des variables d'état du système avec les CI $x(0) = [0,2\ \ -0,1]^T$

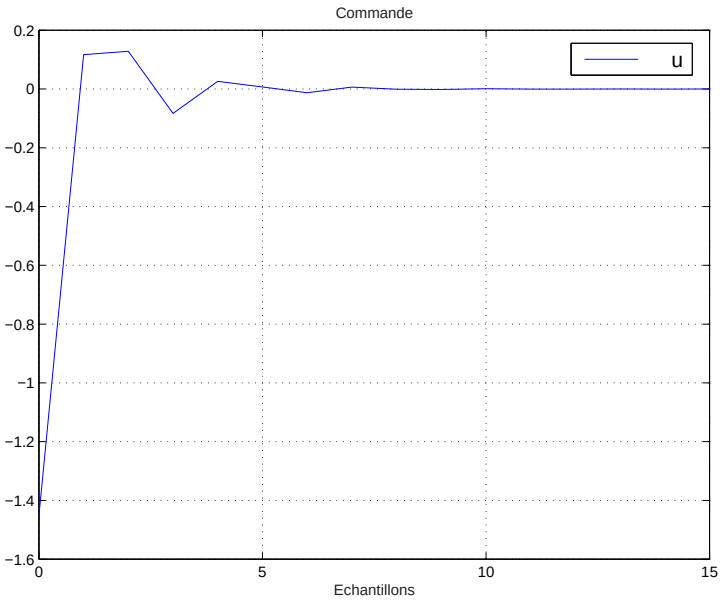


Figure 3.8. : Résultat en simulation : commande du système complet avec $x(0) = [0,2 \ -0,1]^T$

3.8. Conclusion

Ce chapitre a permis de décrire la stabilité et la stabilisation de modèles flous en utilisant une fonction de Lyapunov non quadratique prenant en compte le découpage du modèle flou.

Dans le cas discret, deux approches ont été mises en œuvre, la première permet d'obtenir des résultats en stabilité et en stabilisation dans un cas particulier de modèles flous, mais ne permet pas de répondre au cas général des modèles flous, les conditions obtenues étant des BMIs et la mise sous la forme d'un problème LMI semblant alors très difficile.

La deuxième approche du cas non quadratique permet à l'aide d'une transformation basée sur le complément de Schur de déterminer un problème LMI dans le cas général. Pour le moment, il semble qu'il faille garder les deux approches, étant donné que les problèmes LMIs ne sont pas équivalents. Effectivement, si la deuxième est plus générale que la première, dans le cas particulier où $\forall i,\ B_i = k_i \cdot B$ et $k_i > 0$, les conditions de la première approche sont moins conservatives. Le théorème de séparation du cas quadratique étant étendu facilement au cas non quadratique, on peut dire en conclusion, pour le cas discret, que l'on a tout à gagner à utiliser les conditions de stabilité et de stabilisation non quadratiques, et rien à perdre.

Chapter 4

Application à un procédé réel : le double pendule inversé

«À quoi bon soulever des montagnes quand il est si simple de passer par dessus ?»
Boris Vian, écrivain surréaliste français.

CES DIFFÉRENTES recherches ont pu être appliquées sur un procédé réel développé au sein du LAMIH (**L**aboratoire d'**A**utomatique et de **M**écanique **I**ndustrielles et **H**umaines). Cette application concerne la commande en simulation et en temps réel d'un système bien connu : le double pendule inversé. Cette plate-forme d'essais permet de valider diverses lois de commande basées sur les modèles classiques linéaires ou non-linéaires ou encore sur un modèle flou de type Takagi-Sugeno. Une plate-forme d'un simple pendule déjà existante [Lebrun, 1997], [Vermeiren, 1998] a permis de mettre en œuvre le double pendule après quelques modifications techniques.

Sommaire

4.1. Introduction 82
4.2. Description de la plate forme 83
4.2.1. Le simple pendule inversé 83
4.2.2. Modifications techniques 84
4.3. Modélisation du double pendule 86
4.3.1. Modèle de connaisance 86
4.3.2. Modèles simplifiés 90
4.3.2.1. Modèle linéarisé 90
4.3.2.2. Modèle flou TS 91
4.4. Stabilisation du double pendule en simulation 94

4.4.1. Calcul de l'observateur 95
4.4.1.1. Observateur flou vs observateur linéaire 95
4.4.1.2. Remarques sur la convergence des erreurs d'observation. 96
4.4.2. Loi de commande linéaire 99
4.4.3. Loi de commande PDC 103
4.5. Stabilisation du double pendule en temps réel 107
4.5.1. Loi de commande linéaire quadratique 107
4.5.2. Loi de commande PDC 109
4.6. Conclusion 110

4.1. Introduction

De nombreuses méthodes de commande ont été testées sur ce type de plate-forme et plus précisément sur le simple pendule inversé. En effet il est possible de trouver dans la littérature des travaux concernant la commande d'un simple pendule inversé par des lois :

- basées sur un problème de contrôle d'énergie [Aström et Furuta, 1996], associées à une séquence de balancement qui permet de relever le pendule de sa position d'équilibre stable [Wei *et al.*, 1995], [Vermeiren, 1998],
- basées sur la commande floue, soit en utilisant la notion d'ensembles flous et un régulateur de type Mamdani [Yamakawa, 1989], [Kandel *et al.*, 1993], [Lo et Kuo, 1998], soit par la commande adaptative floue [Wang *et al.*, 1996] ou encore en utilisant les modèles de type Takagi-Sugeno [Vermeiren, 1998],
- basées sur les réseaux neuronaux [Anderson, 1989],
- basées sur la commande H^∞ [Van Der Linden et Lambrechts, 1993],
- basées sur la méthode des moments [Jacob, 1995],
- basées sur la commande non linéaire [Wei *et al.*, 1995],
- ....

En ce qui concerne la commande du double pendule inversé les exemples sont moins nombreux. [Cheng *et al.*, 1996] réalise la stabilisation d'un double pendule inversé par une commande floue basée sur un régulateur de type Mandani. [Loftia, 1999] réalise la commande floue en construisant les règles du régulateur en se basant sur la commande du simple pendule. [Furuta *et al.*, 1994] ont proposé un régulateur pour le double pendule inversé en considérant une approche dans l'espace d'état et un observateur d'ordre réduit.

Le double pendule inversé est un système multivariable non linéaire instable avec des constantes de temps très rapides. Cette plate-forme est reconnue pour être un système difficilement stabilisable. Réaliser la commande en simulation et surtout en temps réel de ce système multivariable fortement non linéaire et instable est un bon défi.

4.2. Description de la plate forme

4.2.1. Le simple pendule inversé

La plate-forme a été réalisée dans le cadre d'un mémoire d'ingénieur CNAM [Lebrun, 1997]. Le simple pendule inversé, à partir duquel les modifications ont été faites afin de réaliser un double pendule inversé, est composée d'un rail de guidage de 4 mètres avec un chariot libre en translation de la société INA, pouvant supporter des vitesses linéaires supérieures à 5 m/s (Cf. figure 4.1).

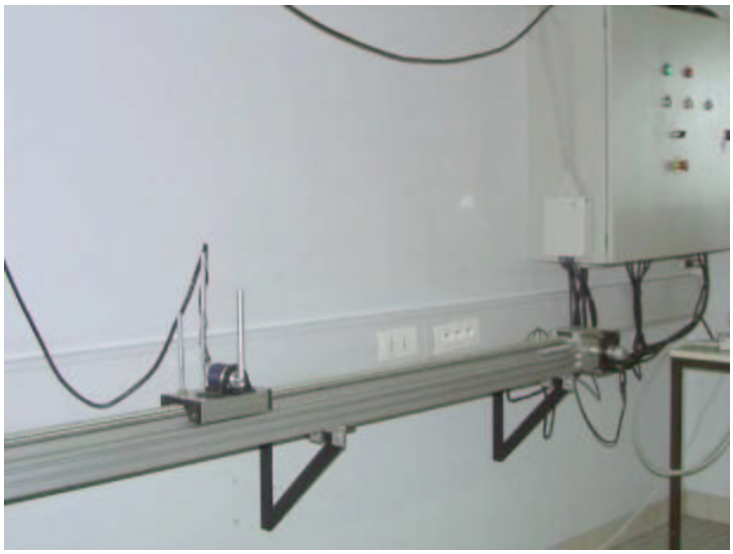


Figure 4.1. : La plate-forme d'essais : le simple pendule inversé

La motorisation du chariot est assurée par un moteur couple à aimants permanents de marque PARVEX fourni par l'IUT GEII de Valenciennes couplé à un servo-amplificateur de même marque. Ce dernier est assimilable à un régulateur de type PI, fournit un courant impulsionnel de 40 ampères et autorise une tension d'entrée-sortie de ± 10 volts.

La mesure de l'angle du pendule avec la verticale est réalisée par un codeur absolu de la société IVO qui permet de transmettre un mot de 13 bits en liaison parallèle. Le pas de codage est l'équivalent de 0.004°. Ce codeur est solidaire du chariot et porte sur son axe le bras du pendule.

Le mesure de la position horizontale du chariot s'effectue grâce à un codeur incrémental fixé sur l'axe d'entraînement du rail de guidage. Ce codeur délivre 500 impulsions par tour et possède deux voies décalées d'un quart de période permettant de detecter le sens de déplacement du chariot. Il est aussi possible de le connecter via une interface RS422 qui n'est pas utilisée dans le cadre du simple pendule. La valeur de la position du chariot est donnée par le comptage/décomptage des impulsions. La précision de la mesure est de $0,54$ mm.

Le système permettant le traitement des différentes entrées et le pilotage du servo-amplificateur est une carte d'acquisition entrée/sortie ATMIO-16-DE-10 de la société Na-

tional Instruments montée dans un PC 486 DX 33Mhz. Tous les algorithmes de régulation et d'aquisition sont programmés en $\mathcal{C}$ grâce aux librairies de LabWindows.

Un certain nombre de composants doivent être modifiés afin de passer au double pendule inversé.

4.2.2. Modifications techniques

Du point du vue mécanique, un montage a été réalisé au sein du LAMIH afin de permettre la mesure des angles des deux bras du pendule comme le montre la figure 4.2. Un codeur identique au premier, solidaire lui aussi du chariot, permettra de donner la valeur de l'angle du second bras. Le renvoi de la valeur de l'angle du codeur est réalisé par un système de poulie et courroie crantée (Cf. figure 4.2).

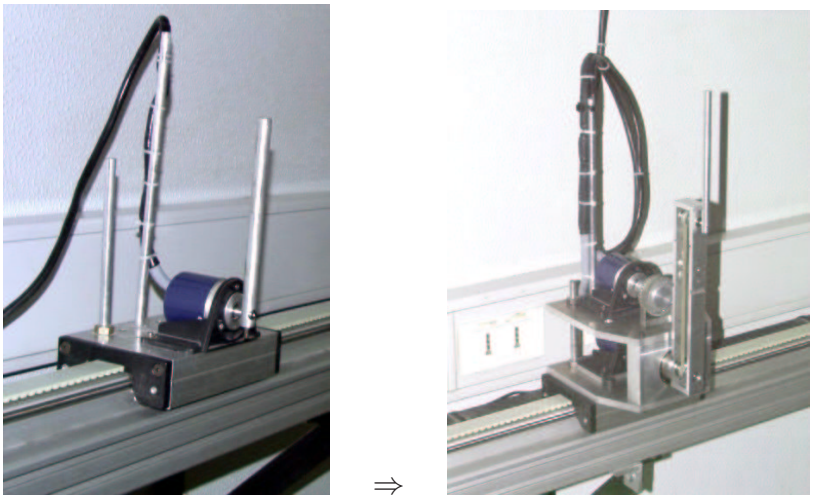


Figure 4.2. : Passage du simple au double pendule inversé

Les développements concernant l'élaboration de lois de commande sont réalisés à l'aide du logiciel Matlab/Simulink. Ce dernier permet une mise en œuvre rapide grâce à la simulation aisée sous l'environnement graphique et à l'utilisation de bibliothèques spécialisées ("Toolboxes") pour le domaine de l'automatique. Le système de développement *dSpace*, qui s'intègre à l'environnement Matlab/Simulink permet la validation rapide et directe sur une maquette réelle.

Le schéma suivant montre tous les composants de la plate-forme d'essai.

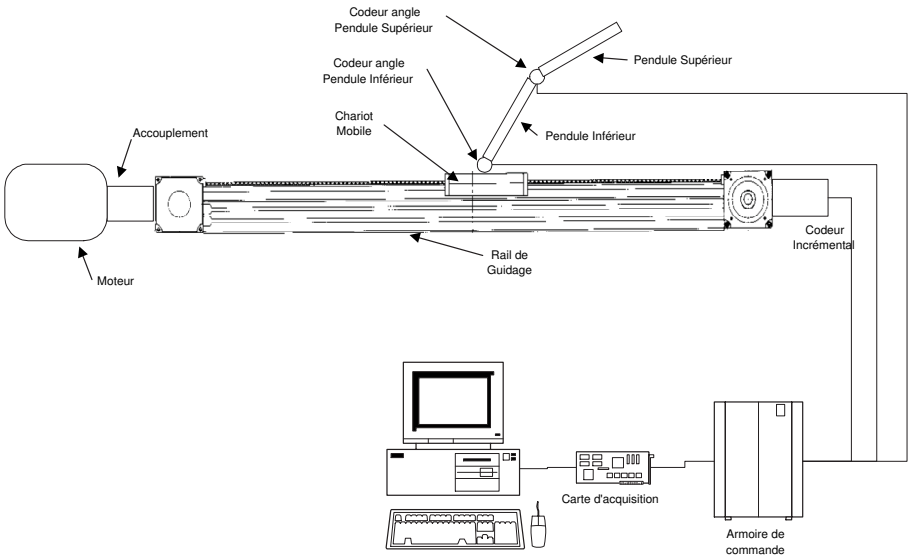


Figure 4.3. : Schéma de principe du double pendule inversé

Une fois les modifications effectuées, la maquette finale réalisée dans le cadre de la thèse est décrite par la figure 4.4.

Figure 4.4. : La plate-forme d'essais : le double pendule inversé

Afin de réaliser les simulations, un modèle du système réel est nécessaire. La partie

suivante présente la détermination de différents modèles du double pendule inversé.

4.3. Modélisation du double pendule

Afin de réaliser la commande d'un tel système, une phase de modélisation est nécessaire pour permettre l'étude en simulation. À partir des équations de mouvement du système chariot-pendule, un premier modèle mathématique non linéaire est calculé par les équations de Lagrange. Afin de pouvoir appliquer des lois de commande, deux modèles simplifiés sont dégagés :

(i) un modèle linéaire autour du point d'équilibre instable,

(ii) un modèle flou de type T-S, pour un domaine des angles plus important.

Le paragraphe suivant présente la mise en œuvre du modèle mathématique à partir du modèle de connaissance.

4.3.1. Modèle de connaisance

Le double pendule inversé est composé d'un chariot mobile sur un rail de guidage. Le double pendule, solidaire du chariot, est libre en rotation autour de deux axes, comme le montre la figure 4.5.

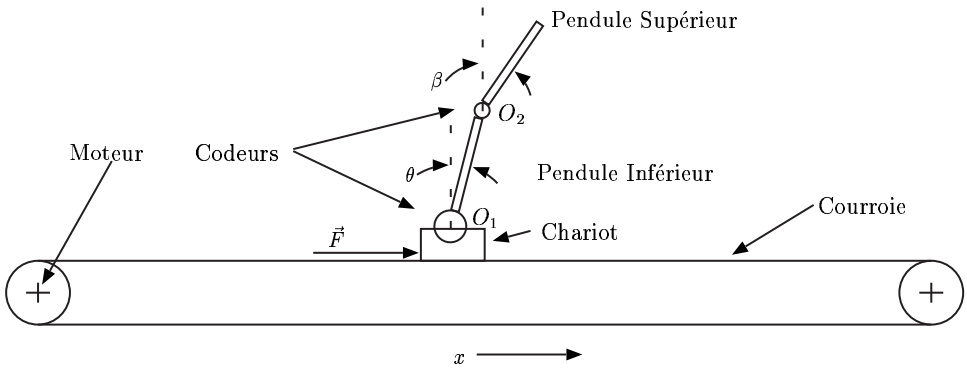


Figure 4.5. : Schéma de principe du double pendule inversé

La commande de ce système doit permettre la régulation de l'angle θ et β, respectivement angle du bras inférieur avec la verticale et angle du bras supérieur avec la verticale, en partant d'une position initiale $(\theta_0, \beta_0) \in [-\pi rad, \pi rad]$, ainsi que la régulation et la poursuite de la position x du chariot sur le rail en partant d'une position initiale $x_0 \in [-1m, 1m]$.

Les équations éléctriques et mécaniques des différents composants de la plate-forme fournissent un modèle de connaissance du système qui met en œuvre les différentes forces décrites dans la figure 4.5.

Lors des déplacements à grande vitesse (ce qui est le cas sur le pendule), les forces dynamiques deviennent significatives et entraînent des déviations de trajectoire [Lopez et Foulc, 1984]. Dans ce cas les modèles géométriques (commande en position) et cinématiques (commande en vitesse) sont inadaptés. Il devient nécessaire d'étudier le modèle dynamique du système en tenant compte des forces inertielles, de Coriolis, centrifuges et des couples moteurs.

Le but de la commande dynamique est de déterminer les forces ou les couples à appliquer aux articulations pour obtenir la configuration désirée à chaque instant. On écrit alors :

$$\Gamma = F\left(q,\, \dot{q},\, \ddot{q}\right)$$

où Γ est le vecteur des forces généralisées, q, $\dot{q}$, et $\ddot{q}$ désignent respectivement les coordonnées, les vitesses et les accélérations généralisées.

Dans le cadre de notre étude le formalisme de Lagrange est utilisé.

Équations de Lagrange L'avantage de ce formalisme réside dans l'élimination des efforts d'interaction. Le Lagrangien L d'un système est la différence entre l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle U [Boissonat *et al.*, 1988] :

$$L = T - U$$

Par définition, les équations de Lagrange du système s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\left(q\left(t\right), \dot{q}\left(t\right)\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\left(q\left(t\right), \dot{q}\left(t\right)\right) = \Gamma_i \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.1}$$

où Γ_i désignent les forces généralisées n'intervenant pas dans l'énergie potentielle : forces d'amortissement, forces et couples extérieurs et q_i désignent les coordonnées généralisées. Dans notre cas, d'après la figure 4.5, $q = \left[x\left(t\right), \theta(t), \beta(t)\right]$ et $\dot{q} = \left[\frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}\theta(t), \frac{d}{dt}\beta(t)\right]$.

L'énergie cinétique $T\left(q,\, \dot{q}\right)$ peut être exprimée par une forme quadratique des vitesses généralisées $\dot{q}$ telle que :

$$T\left(q,\, \dot{q}\right) = 1/2\, \dot{q}^T\left(a(q)\right)\dot{q}$$

où $a(q)$ est une matrice symétrique d'ordre n.

L'énergie potentielle U peut être représentée par la somme des énergies potentielles de chaque sous système mécanique :

$$U = \sum_{i=1}^{n} m_i g h_i$$

où m_i représente la masse du sous système, et h_i la hauteur du centre de gravité du sous système par rapport au référentiel et g l'accélaration gravitationelle.

L'effet de l'ensemble moteur-poulies-rail de guidage et servo-amplificateur est assimilé à un gain G intervenant sur la commande : la dynamique de cette ensemble est beaucoup plus rapide que celle du système chariot-double pendule (ce régime transitoire n'affecte pas le système).

La figure 4.6 présente les différentes variables nécessaires à la réalisation du modèle. Les caractéritisques du double pendule sont résumées dans le tableau suivant :

Notation	Valeur
M	Masse du Chariot
m_1	Masse du pendule inférieur
l_1	Demi longueur du pendule inférieur
m_2	Masse du pendule supérieur
l_2	Demi longueur du pendule supérieur
g	Pesanteur
k_{O_1}	Coefficient de frottement au point O_1
k_{O_2}	Coefficient de frottement au point O_2
f	Frottements
$F(t)$	Force à appliquer au chariot
θ	Angle entre le premier pendule et la verticale
β	Angle entre le second pendule et la verticale
x	Position du chariot

Table 4.1.: Tableau des variables du double pendule inversé.

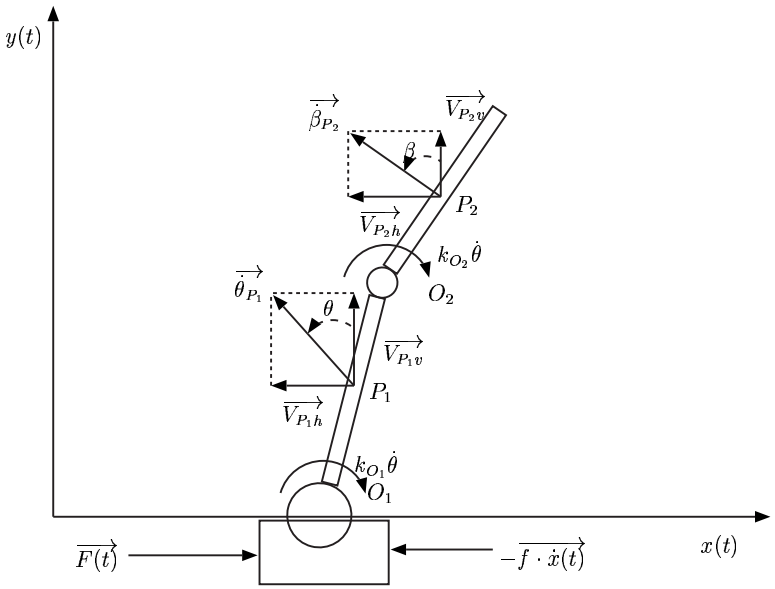


Figure 4.6. : Représentation des forces agissant sur le double pendule

Afin de calculer l'énergie cinétique du pendule, il est nécessaire de calculer les vitesses des centres de gravité.

Vitesses des centres de gravités D'après la figure 4.6 les vitesses des centres de gravité sont données par les expressions suivantes [Tirmant, 2000] :

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_{1_{ph}} & = & -l_1\dot{\theta}\left(t\right)\cos\theta\left(t\right) \\ v_{1_{pv}} & = & l_1\dot{\theta}\left(t\right)\sin\theta\left(t\right) \end{array}\right. \tag{4.2}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_{2_{ph}} & = & -2l_1\dot{\theta}\left(t\right)\cos\theta\left(t\right) - l_2\dot{\beta}\left(t\right)\cos\beta\left(t\right) \\ v_{2_{pv}} & = & 2l_1\dot{\theta}\left(t\right)\sin\theta\left(t\right) + l_2\dot{\beta}\left(t\right)\sin\beta\left(t\right) \end{array}\right. \tag{4.3}$$

avec θ, β les angles du double pendule et $\dot{\theta}$, $\dot{\beta}$ les vitesses angulaires de chaque bras. Il est alors possible de donner les équations de l'énergie cinétique du système.

Énergie cinétique T Son expression est donnée par :

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x} + v_{1_{ph}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_1v_{1_{pv}}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x} + v_{2_{ph}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2_{pv}}^2$$

et d'après (4.2) et (4.3) :

$$\begin{array}{rcl} T & = & \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x} - l_1\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{2}m_1\left(l_1\dot{\theta}\sin\theta\right)^2 \\ & & + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x} - 2l_1\dot{\theta}\cos\theta - l_2\dot{\beta}\cos\beta\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(2l_1\dot{\theta}\sin\theta + l_2\dot{\beta}\sin\beta\right)^2 \qquad (4.4) \\ & = & \frac{1}{2}\left(M + m_1 + m_2\right)\dot{x}^2 - \left(m_1 + 2m_2\right)l_1\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \left(\frac{1}{2}m_1 + 2m_2\right)l_1^2\dot{\theta}^2 \\ & & - m_2l_2\dot{x}\dot{\beta}\cos\beta + 2m_2l_1l_2\dot{\theta}\dot{\beta}\cos\left(\theta - \beta\right) + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\beta}^2 \qquad (4.5) \end{array}$$

Énergie potentielle U L'expression de l'énergie potentielle est donnée par :

$$\begin{array}{rcll} U & = & m_1g\left(l_1 + l_1\cos\theta\right) + m_2g\left(2l_1 + l_2 + 2l_1\cos\theta + l_2\cos\beta\right) & (4.6) \\ & = & \left(m_1 + 2m_2\right)gl_1\left(1 + \cos\theta\right) + m_2gl_2\left(1 + \cos\beta\right) & (4.7) \end{array}$$

Calcul du Lagrangien Le Lagrangien est donnée par $L = T - U$ et les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} & = & F\left(t\right) - f\dot{x}\left(t\right) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} & = & -\left(k_{O_1} + k_{O_2}\right)\dot{\theta} + k_{O_2}\dot{\beta} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\beta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\beta} & = & k_{O_2}\dot{\theta} - k_{O_2}\dot{\beta} \end{array}\right. \tag{4.8}$$

en conséquence les équations du mouvement du système non linéaire sont données par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} M'\ddot{x} - P_1\ddot{\theta}\cos\theta + P_1\dot{\theta}^2\sin\theta - P_2\ddot{\beta}\cos\beta + P_2\dot{\beta}^2\sin\beta & = & Gu - f\dot{x} \\ -P_1\ddot{x}\cos\theta + P_4\ddot{\theta} + P_3\ddot{\beta}\cos\left(\theta - \beta\right) & & \\ +P_3\dot{\beta}^2\sin\left(\theta - \beta\right) - P_1g\sin\theta & = & -\left(k_{O_1} + k_{O_2}\right)\dot{\theta} + k_{O_2}\dot{\beta} \\ -P_2\ddot{x}\cos\beta + P_3\ddot{\theta}\cos\left(\theta - \beta\right) & & \\ -P_3\dot{\theta}^2\sin\left(\theta - \beta\right) + P_5\ddot{\beta} - P_2g\sin\beta & = & k_{O_2}\dot{\theta} - k_{O_2}\dot{\beta} \end{array}\right. \tag{4.9}$$

avec $M' = M+m_1+m_2$, $P_1 = (m_1+2m_2)\,l_1$, $P_2 = m_2 l_2$, $P_3 = 2m_2 l_1 l_2$, $P_4 = (m_1+4m_2)\,l_1^2$ et $P_5 = m_2 l_2^2$.

En posant $X(t) = \left[x(t)\ \theta(t)\ \beta(t)\ \dot{x}(t)\ \dot{\theta}(t)\ \dot{\beta}(t)\right]^T$ et $\dot{X}(t) = \left[\ddot{x}(t)\ \ddot{\theta}(t)\ \ddot{\beta}(t)\right]$, après quelques calculs, le système s'écrit sous la forme $\dot{X}(t) = f(X(t))$ avec :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \Big[\Big[\left(P_4P_5 - P_3^2\cos^2(\theta-\beta)\right)\left(Gu - P_1\dot{\theta}^2\sin\theta - P_2\dot{\beta}^2\sin\beta - f\dot{x}\right)\Big]\\ &\quad -\left[\left(-P_1P_5\cos\theta + P_2P_3\cos\beta\cos(\theta-\beta)\right)\right.\\ &\quad \left.\left(-P_3\dot{\beta}^2\sin(\theta-\beta) + P_1g\sin\theta - (k_{O_1}+k_{O_2})\,\dot{\theta} + k_{O_2}\dot{\beta}\right)\right]\\ &\quad +\left[\left(-P_1P_3\cos\theta\cos(\theta-\beta) + P_2P_4\cos\beta\right)\right.\\ &\quad \left.\left(P_3\dot{\theta}^2\sin(\theta-\beta) + P_2g\sin\beta + k_{O_2}\dot{\theta} - k_{O_2}\dot{\beta}\right)\right]\Big] / \det(A)\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \Big[\Big[-\left(-P_1P_5\cos\theta + P_2P_3\cos\beta\cos(\theta-\beta)\right)\left(Gu - P_1\dot{\theta}^2\sin\theta - P_2\dot{\beta}^2\sin\beta - f\dot{x}\right)\Big]\\ &\quad +\left[\left(M'P_5 - P_2^2\cos^2\beta\right)\left(-P_3\dot{\beta}^2\sin(\theta-\beta) + P_1g\sin\theta - (k_{O_1}+k_{O_2})\,\dot{\theta} + k_{O_2}\dot{\beta}\right)\right]\\ &\quad -\left[\left(M'P_3\cos(\theta-\beta) - P_1P_2\cos\theta\cos\beta\right)\right.\\ &\quad \left.\left(P_3\dot{\theta}^2\sin(\theta-\beta) + P_2g\sin\beta + k_{O_2}\dot{\theta} - k_{O_2}\dot{\beta}\right)\right]\Big] / \det(A)\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\beta} &= \Big[\Big[\left(-P_1P_3\cos\theta\cos(\theta-\beta) + P_2P_4\cos\beta\right)\left(Gu - P_1\dot{\theta}^2\sin\theta - P_2\dot{\beta}^2\sin\beta - f\dot{x}\right)\Big]\\ &\quad -\left[\left(M'P_3\cos(\theta-\beta) - P_1P_2\cos\theta\cos\beta\right)\right.\\ &\quad \left.\left(-P_1\dot{\beta}^2\sin(\theta-\beta) + P_1g\sin\theta - (k_{O_1}+k_{O_2})\,\dot{\theta} + k_{O_2}\dot{\beta}\right)\right]\\ &\quad +\left[\left(M'P_4 - P_1^2\cos^2\theta\right)\right.\\ &\quad \left.\left(P_3\dot{\theta}^2\sin(\theta-\beta) + P_2g\sin\beta + k_{O_2}\dot{\theta} - k_{O_2}\dot{\beta}\right)\right]\Big] / \det(A)\end{aligned} \tag{4.12}$$

avec $\det(A) = M'P_4P_5 + 2P_1P_2P_3\cos\theta\cos\beta\cos(\theta-\beta) - P_2^2P_4\cos^2\beta - M'P_3^2\cos^2(\theta-\beta) - P_1^2P_5\cos^2\theta$. À partir de ce modèle mathématique fortement non linéaire, un modèle linéarisé autour des très petits angles θ et β est calculé.

4.3.2. Modèles simplifiés

Le modèle mathématique basé sur le modèle de connaissance étant trop complexe et très non linéaire, deux modèles simplifiés sont écrits. Le premier est un modèle linéarisé autour du point de fonctionnement de l'équilibre instable, le second est un modèle flou plus général, qui comprend un domaine des angles beaucoup plus vaste.

4.3.2.1. Modèle linéarisé

Dans ce modèle, de petites variations autour des angles $\theta = 0$ et $\beta = 0$ sont considérées. En remplaçant les termes non linéaires en sin et cos, par leurs développement limité au

premier ordre et en négligeant les termes en $\dot{\theta}^2$ et $\dot{\beta}^2$ le modèle linéarisé suivant est obtenu :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \left[\left[\left(P_4P_5 - P_3^2\right)(Gu - f\dot{x})\right]\right. \\ &\quad - \left[\left(-P_1P_5 + P_2P_3\right)\left(P_1g\theta - \left(k_{O_1} + k_{O_2}\right)\dot{\theta} + k_{O_2}\dot{\beta}\right)\right] \\ &\quad \left. + \left[\left(-P_1P_3 + P_2P_4\right)\left(P_2g\beta + k_{O_2}\dot{\theta} - k_{O_2}\dot{\beta}\right)\right]\right] / \det(A) \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \left[\left[-\left(-P_1P_5 + P_2P_3\right)(Gu - f\dot{x})\right]\right. \\ &\quad + \left[\left(M'P_5 - P_2^2\right)\left(P_1g\theta - \left(k_{O_1} + k_{O_2}\right)\dot{\theta} + k_{O_2}\dot{\beta}\right)\right] \\ &\quad \left. - \left[\left(M'P_3 - P_1P_2\right)\left(P_2g\beta + k_{O_2}\dot{\theta} - k_{O_2}\dot{\beta}\right)\right]\right] / \det(A) \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\beta} &= \left[\left[\left(-P_1P_3 + P_2P_4\right)(Gu - f\dot{x})\right]\right. \\ &\quad - \left[\left(M'P_3 - P_1P_2\right)\left(P_1g\theta - \left(k_{O_1} + k_{O_2}\right)\dot{\theta} + k_{O_2}\dot{\beta}\right)\right] \\ &\quad \left. + \left[\left(M'P_4 - P_1^2\right)\left(P_2g\beta + k_{O_2}\dot{\theta} - k_{O_2}\dot{\beta}\right)\right]\right] / \det(A) \end{aligned} \tag{4.15}$$

où $\det(A) = M'P_4P_5 + 2P_1P_2P_3 - P_2^2P_4 - M'P_3^2 - P_1^2P_5$.

4.3.2.2. Modèle flou TS

Le modèle décrit équations (4.10), (4.11) et (4.12), présente de nombreux termes non linéaires. Pour obtenir, un découpage en nombre de règles minimal représentant sur un intervalle des variables d'état, exactement le modèle non linéaire, il est nécessaire d'utiliser une transformation sur les non linéarités suivantes :

- pour les variables d'état mesurables, θ et β :
  $sin(\theta)$, $sin(\beta)$, $cos(\theta)$, $cos(\beta)$, $cos^2(\theta)$, $cos^2(\beta)$, $cos(\theta - \beta)$ et $cos^2(\theta - \beta)$;
- pour les variables d'état non mesurables $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$:
  $\dot{\theta}^2 sin(\theta)$, $\dot{\beta}^2 sin(\beta)$, $\dot{\theta}^2 sin(\theta - \beta)$ et $\dot{\beta}^2 sin(\theta - \beta)$.

Toutes ces fonctions étant bornées sur un intervalle des variables d'état, il est possible de construire le modèle flou, Cf. chapitre 2, il sera alors composé de $2^{12} = 4096$ règles ! Il est alors impératif de réaliser une réduction de ce nombre de règles. La structure spécifique des termes non linéaires permet de faire des remarques intéressantes allant dans le sens de la réduction de ce nombre de règles.

(i) **Première remarque :** il est possible d'utiliser la même transformation pour $\frac{sin(x)}{x}$ et pour $cos(x)$. Effectivement, pour $x \in [-x_0, x_0]$ on peut écrire :

$$\frac{sin(x)}{x} = \frac{x_0 sin(x) - x sin(x_0)}{x\left(x_0 - sin(x_0)\right)} \cdot 1 + \frac{x_0\left(x - sin(x)\right)}{x\left(x_0 - sin(x_0)\right)} \cdot \frac{sin(x_0)}{x_0},$$

$$cos(x) = \frac{cos(x) - cos(x_0)}{1 - cos(x_0)} \cdot 1 + \frac{1 - cos(x)}{1 - cos(x_0)} \cdot cos(x_0).$$

La propriété intéressante sur les fonctions d'appartenance obtenues est (Cf. figure 4.7) :

$$\text{pour } x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \forall x \in [-x_0, x_0] ,\ \left| \frac{x_0 sin(x) - x sin(x_0)}{x(x_0 - sin(x_0))} - \frac{cos(x) - cos(x_0)}{1 - cos(x_0)} \right| < 2,4\%$$

Cette première remarque permet "d'éliminer" les transformations sur les termes suivants : $cos(\theta)$ et $cos(\beta)$, le modèle flou obtenu est alors composé de $2^{10} = 1024$ règles.

(ii) **Deuxième remarque :** sur un intervalle de l'angle $x \in [-x_0, x_0]$ (avec x_0 entre 30^o et 50^o) il est possible d'utiliser la même transformation pour $cos(x)$ et $cos^2(x)$. Effectivement pour $x \in [-x_0, x_0]$ on peut écrire :

$$cos^2(x) = \frac{cos^2(x) - cos^2(x_0)}{1 - cos^2(x_0)} \cdot 1 + \frac{1 - cos^2(x)}{1 - cos^2(x_0)} \cdot cos^2(x_0) .$$

Une autre propriété intéressante est alors :

$$\forall x \in [-x_0, x_0] , \left| \frac{cos^2(x) - cos^2(x_0)}{1 - cos^2(x_0)} - \frac{cos(x) - cos(x_0)}{1 - cos(x_0)} \right| < p\%$$

avec, par exemple : pour $x_0 = 30^o$, $p\% = 1,8\%$, pour $x_0 = 50^o$, $p\% = 5,4\%$. Cette deuxième remarque permet "d'éliminer" les transformations sur les termes suivants : $cos^2(\theta)$, $cos^2(\beta)$ et $cos^2(\theta - \beta)$, le modèle flou obtenu est alors composé de $2^7 = 128$ règles.

(iii) **Troisième remarque :** si l'on désire pouvoir utiliser le principe de séparation entre le calcul des gains d'un observateur flou et d'une loi de commande (PDC, CDF ou SSF) il est nécessaire que les variables de prémisse n'utilisent que variables mesurables. Si les deux premières remarques ne correspondent qu'à des simplifications mineures du modèle non linéaire, cette dernière remarque impose donc l'élimination des termes $\dot{\theta}^2 sin(\theta)$, $\dot{\beta}^2 sin(\beta)$, $\dot{\theta}^2 sin(\theta - \beta)$ et $\dot{\beta}^2 sin(\theta - \beta)$. Le modèle flou obtenu est alors composé de $2^3 = 8$ règles. Des essais ultérieurs montreront que cette dernière remarque, bien que restrictive, se justifie en simulation et sur le système réel.
Le vecteur des prémisses est alors : $z(t) = \left[\theta(t) \quad \beta(t) \quad cos(\theta(t) - \beta(t)) \right]^T$, et avec $f(x, x_0) = \frac{x_0 sin(x) - x sin(x_0)}{x(x_0 - sin(x_0))}$, les fonctions d'appartenance sont :
$F_1^1(z_1(t)) = f(\theta(t), \theta_0)$, $F_1^2(z_1(t)) = 1 - f(\theta(t), \theta_0)$,
$F_2^1(z_2(t)) = f(\beta(t), \beta_0)$, $F_2^2(z_2(t)) = 1 - f(\beta(t), \beta_0)$,
$F_3^1(z_3(t)) = \frac{cos(\theta(t) - \beta(t)) - cos(\theta_0 + \beta_0)}{1 - cos(\theta_0 + \beta_0)}$, $F_3^2(z_3(t)) = 1 - F_3^1(z_3(t))$.

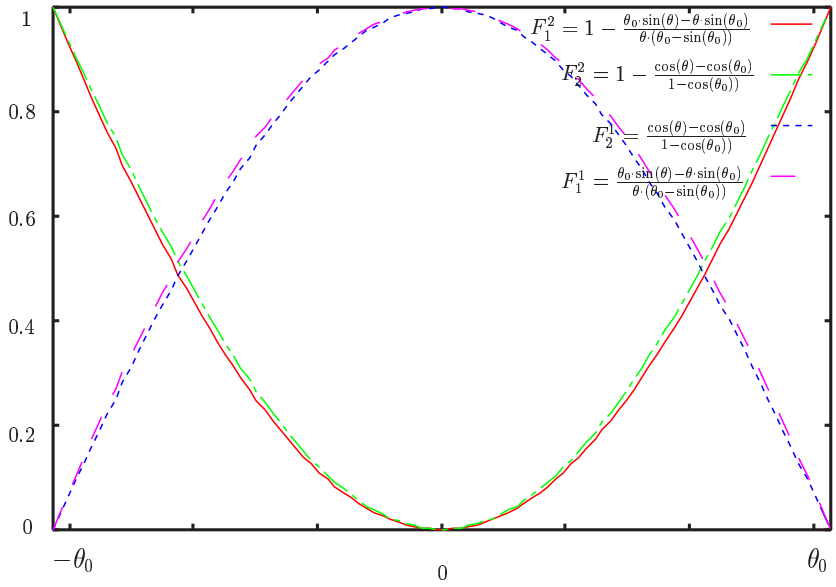


Figure 4.7. : Fonctions d'appartenance des ensembles flous

À titre d'exemple une règle du modèle flou est donnée ci-après :

Règle 1 : Si $\theta(t)$ est F_1^1 et $\beta(t)$ est F_2^1 et $\cos(\theta(t) - \beta(t))$ est F_3^1 alors :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(P_2P_3 - P_1P_5)P_1g}{den} & \frac{(-P_1P_3 + P_2P_4)P_2g}{den} & \frac{-\left(P_4P_5 - P_3^2\right)f}{den} \\ 0 & \frac{\left(M'P_5 - P_2^2\right)P_1g}{den} & \frac{-(M'P_3 - P_1P_2)P_2g}{den} & \frac{-(P_1P_5 - P_2P_3)f}{den} \\ 0 & \frac{-(M'P_3 - P_1P_2)P_1g}{den} & \frac{\left(M'P_4 - P_1^2\right)P_2g}{den} & \frac{-(-P_1P_3 + P_2P_4)f}{den} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{(-P_1P_5 + P_2P_3 - P_1P_3 + P_2P_4)k_{O_2} + (-P_1P_5 + P_2P_3)k_{O_1}}{den} & \frac{(P_1P_5 - P_2P_3 + P_1P_3 - P_2P_4)k_{O_2}}{den} \\ \frac{\left(-M'P_5 + P_2^2 - M'P_3 + P_1P_2\right)k_{O_2} + \left(-M'P_5 + P_2^2\right)k_{O_1}}{den} & \frac{\left(M'P_5 - P_2^2 + M'P_3 - P_1P_2\right)k_{O_2}}{den} \\ \frac{\left(M'P_3 - P_1P_2 + M'P_4 - P_1^2\right)k_{O_2} + (M'P_3 - P_1P_2)k_{O_1}}{den} & \frac{\left(-M'P_3 + P_1P_2 - M'P_4 + P_1^2\right)k_{O_2}}{den} \end{bmatrix} x(t)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{P_4P_5 - P_3^2}{den} \\ \frac{P_1P_5 - P_2P_3}{den} \\ \frac{-P_1P_3 + P_2P_4}{den} \end{bmatrix} u(t)$$

avec $den = M'P_4P_5 + 2P_1P_2P_3 - P_2^2P_4 - M'P_3^2 - P_1^2P_5$ et $M' = M + m_1 + m_2$, $P_1 = (m_1 + 2m_2)\, l_1$, $P_2 = m_2 l_2$, $P_3 = 2m_2 l_1 l_2$, $P_4 = (m_1 + 4m_2)\, l_1^2$ et $P_5 = m_2 l_2^2$.

Le modèle flou complet est décrit en annexe A.1.

La seconde partie des travaux consiste à étudier la stabilisation en simulation du système double pendule inversé, par deux lois de commande dans le cas discret en vue de l'application réelle. Toute l'étude est faite à l'aide du modèle flou déterminé précédemment et en utilisant la logiciel de calcul numérique Matlab .

4.4. Stabilisation du double pendule en simulation

Le double pendule inversé est un système instable, SIMO ("simple input", "multiple output"), qui possède des non linéarités non négligeables dues à sa structure dynamique et aux forces de friction. Il est très souvent utilisé pour la validation de lois de commande et l'analyse de leurs performances [Cheng *et al.*, 1996], [Terano *et al.*, 1988].

Les objectifs de la commande d'un tel système sont de réguler les angles θ et β autour de zéro (la position d'équilibre instable) et d'asservir la position x du chariot à une consigne désirée.

Pour ces différentes simulations, le modèle non linéaire décrit par les expressions (4.10), (4.11) et (4.12) issues des équation de Lagrange ont été utilisées. Les vitesses $\dot{x}$, $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ n'étant pas accessibles, il est nécéssaire de les reconstruire. Deux types d'observateur seront utilisés :

- un observateur linéaire, basé sur le modèle linéarisé du double pendule inversé,
- un observateur flou qui utilise les mêmes parties des prémisses que le modèle flou à 8 règles décrit plus haut,

Celui-ci ne rentre pas dans le cas particulier où les matrices B_i sont linéairement dépendantes. Les lois de commandes appliquées seront de deux types : une loi linéaire (Linéaire Quadratique) et une loi de type PDC. Une loi de commande de type CDF est envisageable, en utilisant les résultats présentés au chapitre 2, i.e. les algorithmes de relaxation utilisant des problèmes LMIs.

Afin de pouvoir, comparer ces lois de commande, le même observateur flou est utilisé. Ce dernier est obtenu en utilisant les conditions de stabilité décrites dans [Tanaka *et al.*, 1998], [Guerra *et al.*, 1999].

Les différents paramètres fixes du double pendule inversé sont décrits dans le tableau suivant :

Paramètre	Valeur
M	33 kg.
m_1	$0,25$ kg.
l_1	$0,2$ m
m_2	$0,25$ kg.
l_2	$0,2$ m
g	$9,81$ m.s^{-2}
k_{O_1}	$0,00003$ N.m/rad
k_{O_2}	$0,00003$ N.m/rad
f	150N.m/rad
G	85

Table 4.2.: Tableau des paramètres numériques du double pendule inversé.

Deux autres paramètres sont nécessaires lors de l'utilisation soit du modèle flou, soit de l'observateur flou, il s'agit des valeurs de θ_0 et β_0 qui décrivent le domaines de validité des fonctions d'appartenances. Ces valeurs seront déterminées à l'aide des conditions de stabilité données dans [Tanaka *et al.*, 1998], [Guerra *et al.*, 1999].

Il est important de noter que toutes les simulations ont été effectuées dans le cas discret, en vue d'être appliquées au procédé réel.

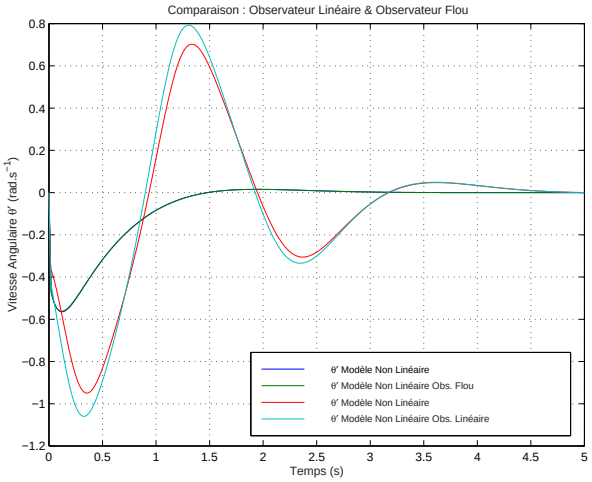
Le point suivant montre l'intérêt de l'utilisation d'un observateur flou par rapport à son homologue linéaire.

4.4.1. Calcul de l'observateur

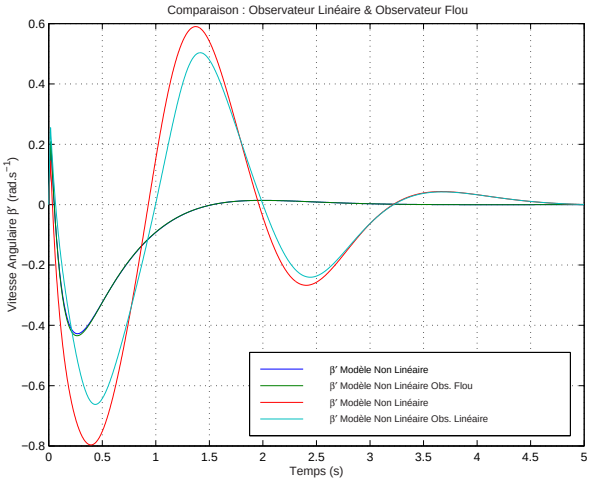
4.4.1.1. Observateur flou vs observateur linéaire

Afin de montrer l'intérêt de l'utilisation d'un observateur flou, un premier essai est effectué pour comparer une loi de commande linéaire associées à un observateur linéaire, et la même loi de commande linéaire associée à un observateur flou sur le modèle non linéaire du double pendule inversé décrit par les équations (4.10), (4.11) et (4.12).

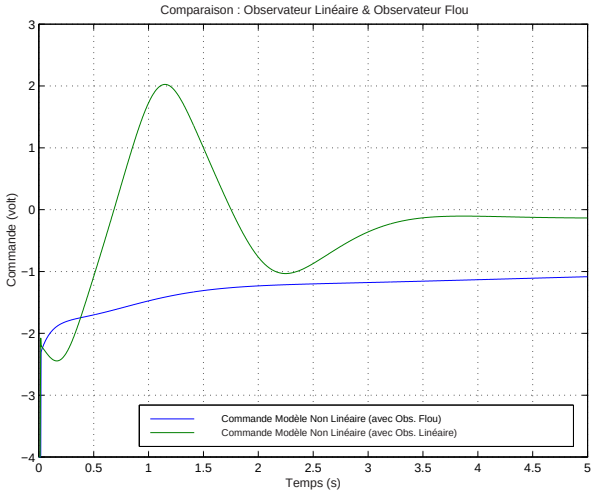
Dans les deux cas, la synthèse de l'observateur et de la loi de commande linéaire a été faite en utilisant les condition de stabilité décrite dans [Tanaka *et al.*, 1998]. On se place dans le cas où les conditions initiales sur les angles et la position sont identiques pour le modèle et l'observateur $x(0) = [0\ \theta_0\ \beta_0\ 0\ 0\ 0]^T$ et $\hat{x}(0) = [0\ \theta_0\ \beta_0\ 0\ 0\ 0]^T$. On constate que le système non linéaire reste stable si $\theta_0 \leq 0,358$ rad et $\beta_0 \leq 0,3$ rad dans le cas d'un observateur linéaire et si $\theta_0 \leq 0,376$ rad et $\beta_0 \leq 0,3$ rad dans le cas d'un observateur flou. Outre le fait que le domaine de stabilité du modèle complet soit légèrement augmenté, il est intéressant de noter, qu'avec la même loi linéaire, les vitesses $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ sont beaucoup mieux reconstruites et que les décrochements sur ces mêmes vitesses sont très réduits comme le montre la figure 4.8.



(a) Variables d'état $\dot{\theta}(k)$ et $\hat{\dot{\theta}}(k)$



(b) Variables d'état $\dot{\beta}(k)$ et $\hat{\dot{\beta}}(k)$



(c) Commande u

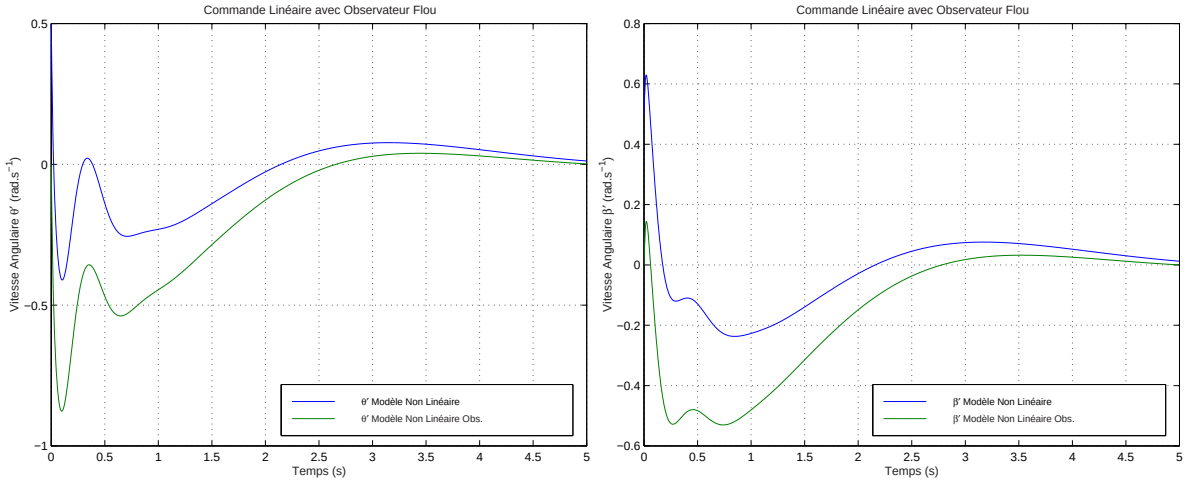
Figure 4.8. : Loi linéaire avec observateur linéaire et observateur flou : Variables d'états non observables $\dot{\theta}$, $\dot{\beta}$ et commande u avec les CI $x\,(0) = [0\ 0,32\ 0,25\ 0\ 0\ 0]^T$ et $\hat{x}\,(0) = [0\ 0,32\ 0,25\ 0\ 0\ 0]^T$.

4.4.1.2. Remarques sur la convergence des erreurs d'observation.

L'exemple précédent utilise des conditions initiales identiques pour le modèle et l'observateur. Dans le cas des variables de prémisse mesurables, il est possible d'initialiser l'observateur avec les variables mesurées. Mais ceci n'est pas possible avec les variables de prémisses non mesurables. Dans le cas réel, il risque donc d'y avoir une incertitude

sur les conditions initiales des vitesses. La convergence de l'erreur de prédiction d'état, en simulation, doit alors être particulièrement "soignée" pour ces variables.

L'observateur flou précédent a été calculé par résolution du problème LMI, qui ne permet que difficilement de prendre en compte des performances. Le résultat dans le cas de conditions initiales différentes sur les vitesses, figure 4.9, montre d'ailleurs que la reconstruction des variables est loin d'être satisfaisante.



(a) Variables d'état $\dot{\theta}(k)$ et $\hat{\dot{\theta}}(k)$

(b) Variables d'état $\dot{\beta}(k)$ et $\hat{\dot{\beta}}(k)$

Figure 4.9. : Loi linéaire avec observateur flou : Variables d'états non observables $\dot{\theta}$, $\dot{\beta}$ et avec les CI $x\,(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0,5\ 0,5]^T$ et $\hat{x}\,(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0\ 0]^T$.

Afin d'introduire des paramètres de règlage pour l'observateur flou, un "mélange" entre synthèse quadratique et LMIs est réalisé. Une approche quadratique permettant d'assurer une convergence rapide des vitesses est déterminé permettant de fixer le gain d'observation du premier sous-modèle K_1, qui correspond au modèle linéarisé. Les pôles de la boucle fermée $A_1 - K_1C_1$ sont donc fixés, et un placement de pôles permet de déterminer les autres matrices de gain K_2 à K_8. La stabilité est assurée en vérifiant simplement qu'il existe une matrice $P > 0$ qui vérifie le problème LMI suivant :

$$\forall i \in \{1,..,8\}\ ,\ (A_i - K_iC)^T\, P\, (A_i - K_iC) - P < 0$$

Il n'y a pas de sous modèles croisés puisque $\forall i,\ C_i = C$.

Après différents essais permettant d'ajuster les vitesses de convergence des erreurs d'observation d'état sur les vitesses $\dot{x}$, $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ on note que la variable d'état la plus difficile à reconstruire est la vitesse angulaire du second pendule $\dot{\beta}$. Les matrices de pondération sont :

$$Q_o = diag[\ 10^{-2}\quad 10\quad 10\quad 10^{-2}\quad 10^{6}\quad 10^{8}\ ],\ \text{et}\ R_o = diag[\ 10^{-4}\quad 1\quad 1\ ].$$

et les résultats sont alors les suivants :

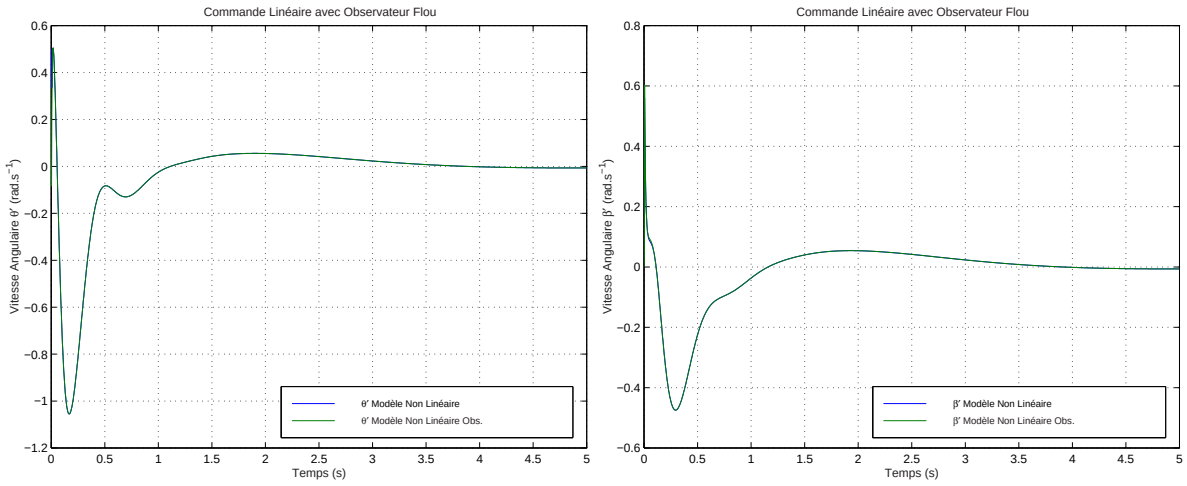
$$K_1 = \begin{bmatrix} 1,0003 & 0 & 0 \\ 0,0005 & 1,6004 & -0,0009 \\ -0,0001 & -0,0022 & 1,9913 \\ 0,1485 & 0,0012 & -0,0004 \\ 0,1764 & 200,5936 & -0,5594 \\ -0,0257 & -1,3489 & 331,0437 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 1,0001 & -0,0077 & -0,0020 \\ -0,0335 & 1,6399 & 0,1102 \\ -0,0811 & 0,1231 & 1,9509 \\ 0,1665 & -2,5228 & -0,6815 \\ -11,0610 & 213,6458 & 36,5825 \\ -26,9118 & 40,5901 & 317,3697 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0,9993 & -0,0042 & 0,0006 \\ -0,0296 & 1,6619 & 0,1272 \\ -0,0631 & 0,1540 & 1,9310 \\ 0,0421 & -1,3944 & 0,1879 \\ -9,7784 & 221,0558 & 42,1271 \\ -20,9504 & 50,6304 & 310,9123 \end{bmatrix}, K_4 = \begin{bmatrix} 1,0000 & -0,0077 & -0,0021 \\ -0,0365 & 1,6468 & 0,1167 \\ -0,0842 & 0,1341 & 1,9441 \\ 0,1781 & -2,5224 & -0,7131 \\ -12,0665 & 215,9438 & 37,7411 \\ -27,9605 & 44,2375 & 315,0902 \end{bmatrix},$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} 0,9994 & -0,0054 & -0,0001 \\ -0,0342 & 1,6616 & 0,1275 \\ -0,0723 & 0,1530 & 1,9311 \\ 0,0797 & -1,7710 & -0,0373 \\ -11,3007 & 220,9578 & 42,2279 \\ -23,9973 & 50,2765 & 310,9498 \end{bmatrix}, K_6 = \begin{bmatrix} 0,9997 & -0,0044 & 0,0056 \\ 0,0449 & 1,7482 & 0,1771 \\ 0,0722 & 0,1998 & 1,8429 \\ 0,0973 & -1,4879 & 1,8683 \\ 14,8424 & 249,7076 & 58,8280 \\ 24,0041 & 66,1341 & 281,4058 \end{bmatrix},$$

$$K_7 = \begin{bmatrix} 0,9994 & -0,0050 & 0,0002 \\ -0,0328 & 1,6619 & 0,1275 \\ -0,0694 & 0,1536 & 1,9308 \\ 0,0654 & -1,6463 & 0,0552 \\ -10,8367 & 221,0534 & 42,2332 \\ -23,0380 & 50,4858 & 310,8719 \end{bmatrix}, K_8 = \begin{bmatrix} 1,0001 & -0,0076 & -0,0013 \\ -0,0285 & 1,6363 & 0,1085 \\ -0,0668 & 0,1148 & 1,9545 \\ 0,1271 & -2,4995 & -0,4213 \\ -9,4185 & 212,4422 & 35,9985 \\ -22,1533 & 37,8329 & 318,5602 \end{bmatrix}.$$

A titre de comparaison, les mêmes conditions que précédemment sont fixées, et les résultats donnés figure 4.10. La reconstruction est à présent quasiment parfaite.



(a) Variables d'état $\dot{\theta}(k)$ et $\hat{\dot{\theta}}(k)$

(b) Variables d'état $\dot{\beta}(k)$ et $\hat{\dot{\beta}}(k)$

Figure 4.10. : Loi linéaire avec observateur flou : Variables d'états non observables $\dot{\theta}$, $\dot{\beta}$ et avec les CI $x\left(0\right) = \left[0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0,5\ 0,5\right]^T$ et $\hat{x}\left(0\right) = \left[0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0\ 0\right]^T$.

Dans toutes les simulations suivantes, l'observateur flou pris en compte est celui qui vient d'être décrit.

4.4.2. Loi de commande linéaire

On s'intéresse en premier lieu à déterminer les conditions qui permettent d'assurer la vérification des LMIs correspondant à la stabilisation du modèle flou à 8 règles en fonction des bornes θ_0 et β_0 de l'univers du discours des variables $\theta\left(k\right)$ et $\beta\left(k\right)$. La figure 4.11 illustre ce domaine.

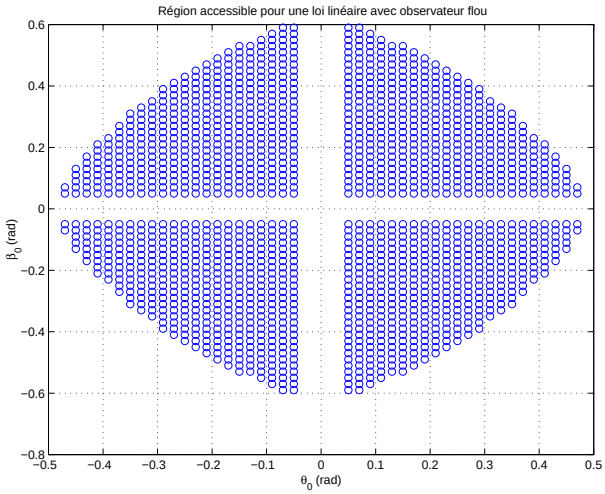


Figure 4.11. : Région accessible pour une loi de commande linéaire.

Néanmoins, comme dans le cas de la synthèse de l'observateur, il est nécessaire d'introduire des notions de performances dans le calcul de la commande.

Pour ce faire, la loi de commande est calculée comme minimisation du critère quadratique $J = \int_0^\infty \left(X^T(t) Q_c X(t) + U^T(t) R_c U(t)\right) dt$ les matrices de pondération étant données par

$$Q_c = diag\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 50 \end{array}\right], \text{ et } R_c = 1.$$

La matrice de gain de retour d'état obtenue est la suivante :

$$L = [0,8443\ 61,3800\ -76,8337\ 0,8423\ -0,9565\ -8,5183].$$

Ce règlage se fait évidemment au "prix" du domaine de stabilité, qui se réduit à $\theta_0 \leq 0,2$ rad et $\beta_0 \leq 0,15$ rad.

On se place dans le cas où les conditions initiales sur les angles et la position sont différentes pour le modèle et l'observateur $x(0) = \left[0\ \theta_0\ \beta_0\ 0\ \dot{\theta}_0\ \dot{\beta}_0\ 0\right]^T$ et $\hat{x}(0) = [0\ \theta_0\ \beta_0\ 0\ 0\ 0]^T$. Les résultats sont présentés dans les figures 4.12, 4.13 et 4.14.

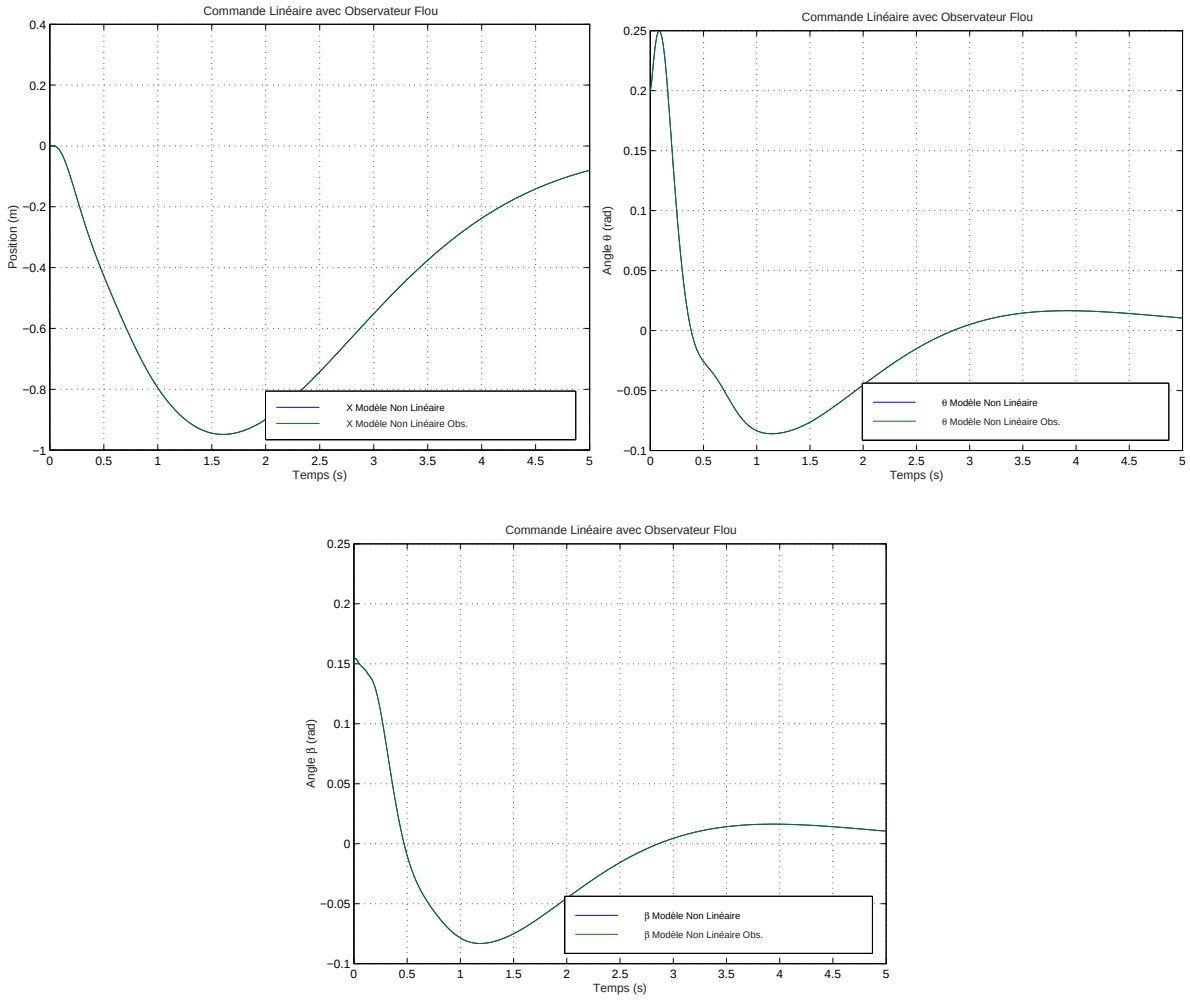
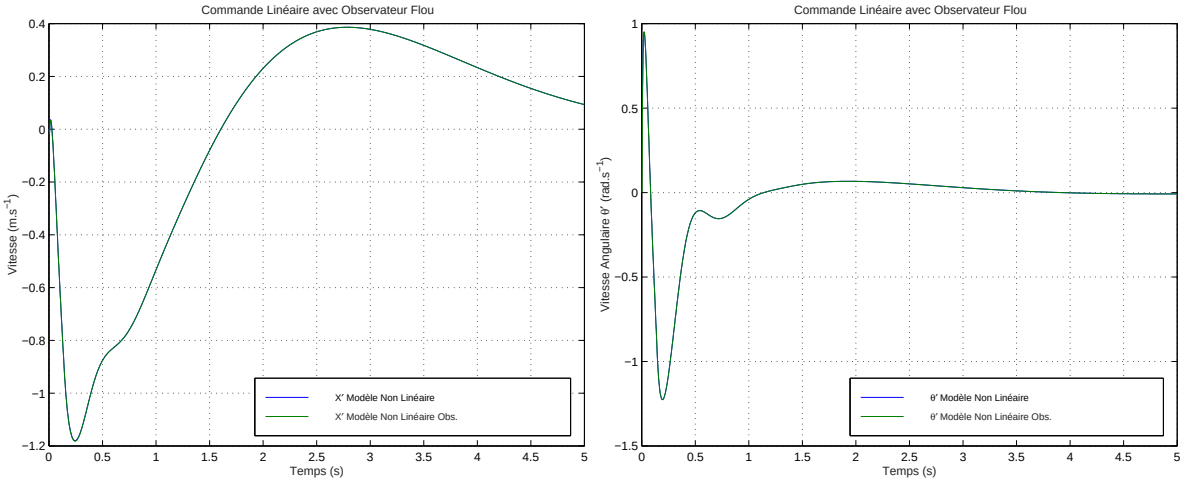


Figure 4.12. : Loi de commande linéaire avec observateur flou : x, θ et β avec les CI $x(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0,5\ 0,5]^T$ et $\hat{x}(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0\ 0]^T$.



(a) Variables d'état $\dot{x}(k)$ et $\hat{\dot{x}}(k)$

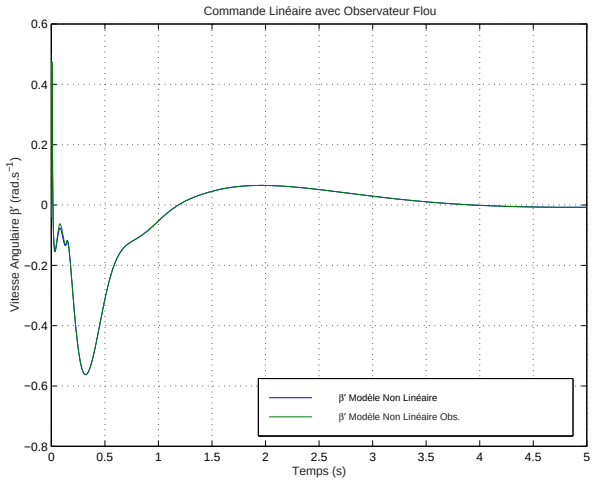


Figure 4.13. : Loi de commande linéaire avec observateur flou : $\dot{x}$, $\dot{\theta}$ et $\dot{\theta}$ avec les CI $x\,(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0,5\ 0,5]^T$ et $\hat{x}\,(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0\ 0]^T$.

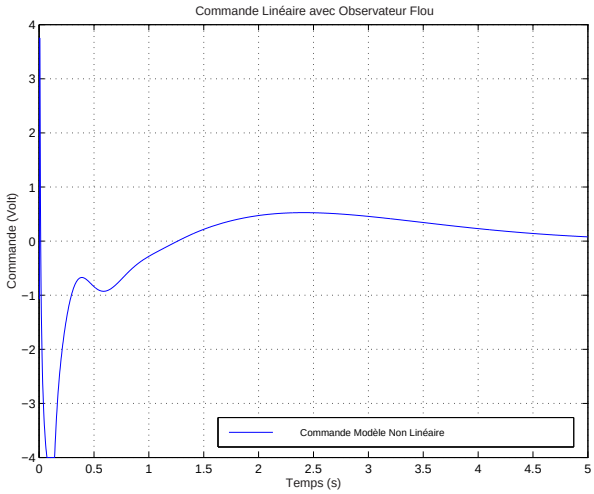


Figure 4.14. : Loi de commande linéaire avec observateur flou : Commande u avec les CI $x(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0,5\ 0,5]^T$ et $\hat{x}(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0\ 0]^T$.

4.4.3. Loi de commande PDC

On s'intéresse en premier lieu à déterminer les conditions qui permettent d'assurer la vérification des LMIs correspondant à la stabilisation du modèle flou à 8 règles en fonction des bornes θ_0 et β_0 de l'univers du discours des variables $\theta(k)$ et $\beta(k)$. La figure 4.15 illustre ce domaine.

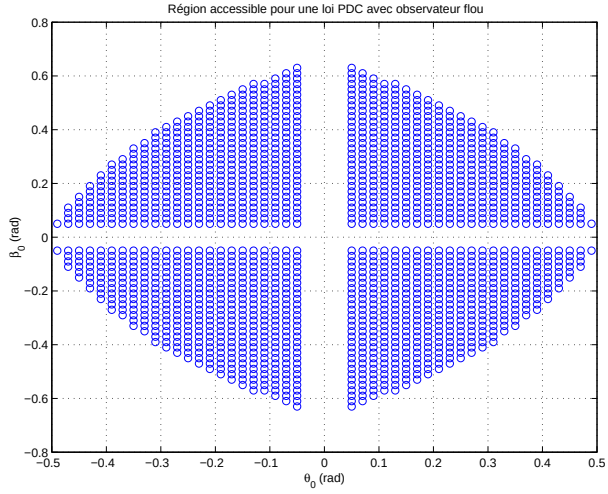


Figure 4.15. : Région accessible pour une loi de commande PDC.

Pour la commande, les matrices de pondération Q_c et R_c du critère quadratique $J = \int_0^\infty \left(X^T(t) Q_c X(t) + U^T(t) R_c U(t)\right) dt$ sont constantes, respectivement définies non

négative et positive,

$$Q_c = diag\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 50 \end{array}\right], \text{ et } R_c = 1.$$

ont été utilisée afin de déterminer la matrice de gain de retour d'état du premier sous modèle. Ensuite tous les autres sous modèles ont été calculés par placement de pôles en prenant pour but, les pôles du premier sous modéle déjà calculé. Ce règlage se fait évidemment au "prix" du domaine de stabilité, qui se réduit à $\theta_0 \leq 0,23$ rad et $\beta_0 \leq 0,18$ rad. Les matrices de gain de retour d'état obtenues sont les suivantes :

$$F_1 = [0,8443\ 61,3800\ -76,8337\ 0,8423\ -0,9565\ -8,5183],$$

$$F_2 = [0,2429\ 98,3848\ -122,9989\ 1,8449\ 1,1043\ -15,0540],$$

$$F_3 = [0,8474\ 58,2787\ -74,3613\ -0,8499\ -1,2277\ -8,3455],$$

$$F_4 = [1,2475\ 93,0673\ -118,6791\ 1,8565\ 0,5666\ -14,6804],$$

$$F_5 = [0,8561\ 68,0700\ -82,8482\ 0,8704\ -0,7705\ -8,8155],$$

$$F_6 = [1,2599\ 110,0023\ -133,4852\ 1,8857\ 1,6808\ -15,7538],$$

$$F_7 = [0,8592\ 64,4144\ -79,9133\ 0,8782\ -1,0752\ -8,6158],$$

$$F_8 = [1,2646\ 103,6459\ -128,2852\ 1,8974\ 1,0629\ -15,3138].$$

On se place dans le cas où les conditions initiales sur les angles et la position sont différentes pour le modèle et l'observateur $x\left(0\right) = \left[0\ \theta_0\ \beta_0\ 0\ \dot{\theta}_0\ \dot{\beta}_0\ 0\right]^T$ et $\hat{x}\left(0\right) = [0\ \theta_0\ \beta_0\ 0\ 0\ 0]^T$. Les résultats sont présentés dans les figures 4.16, 4.17 et 4.18.

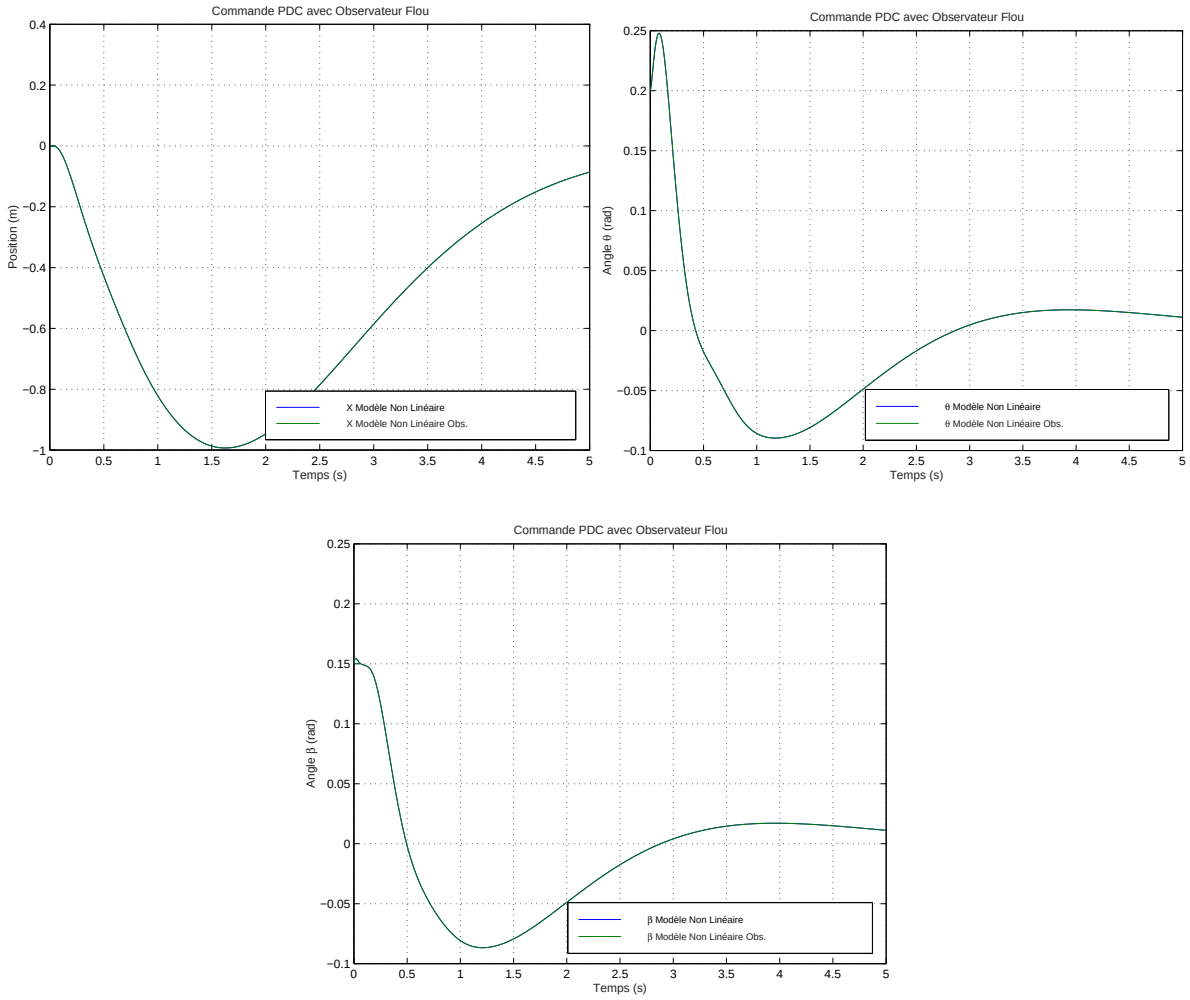


Figure 4.16. : Loi de commande PDC avec observateur flou : x, θ et β avec les CI $x\left(0\right) = \left[0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0,5\ 0,5\right]^T$ et $\hat{x}\left(0\right) = \left[0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0\ 0\right]^T$.

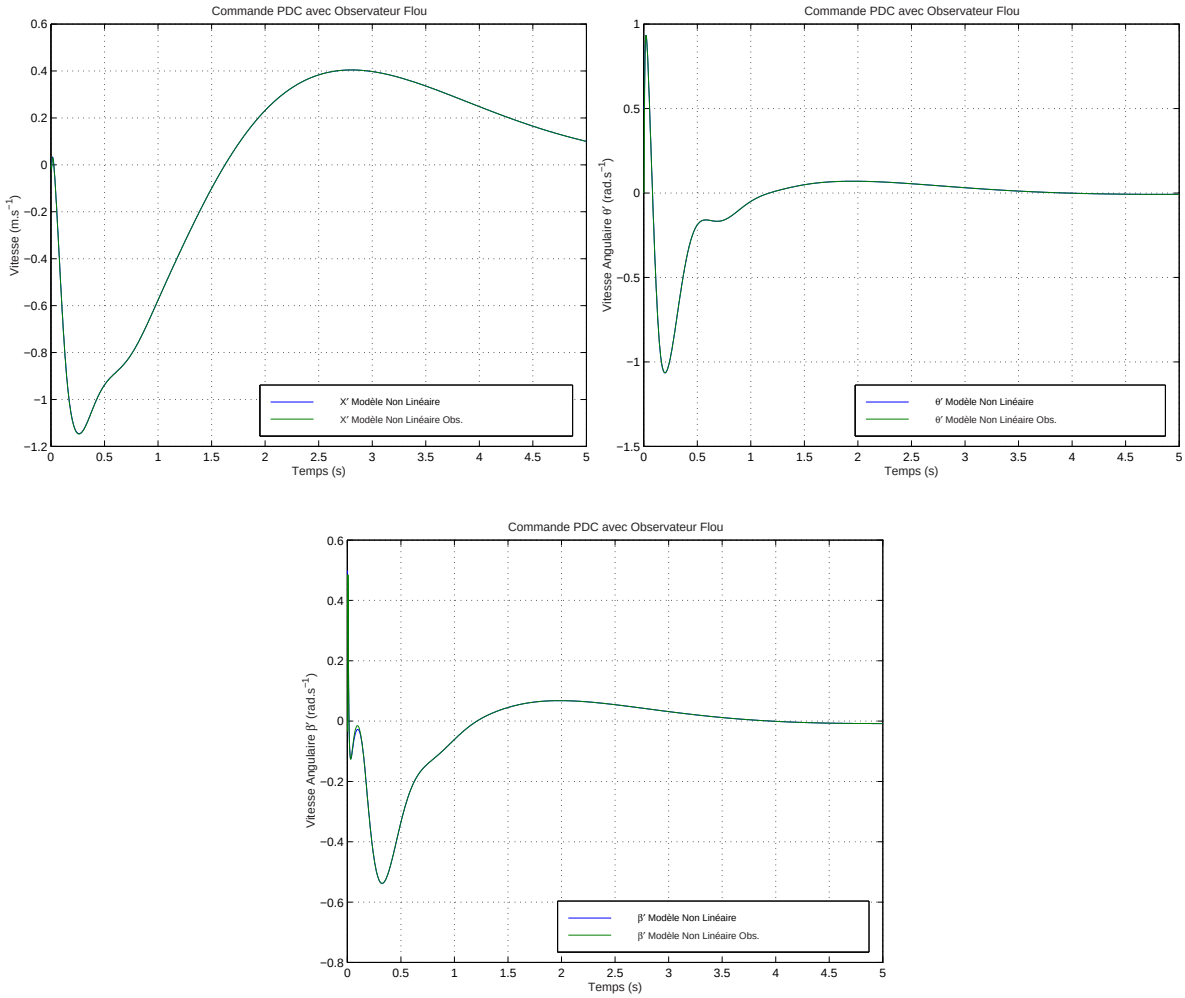


Figure 4.17. : Loi de commande PDC avec observateur flou : $\dot{x}$, $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ avec les CI $x\left(0\right) = \left[0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0,5\ 0,5\right]^T$ et $\hat{x}\left(0\right) = \left[0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0\ 0\right]^T$.

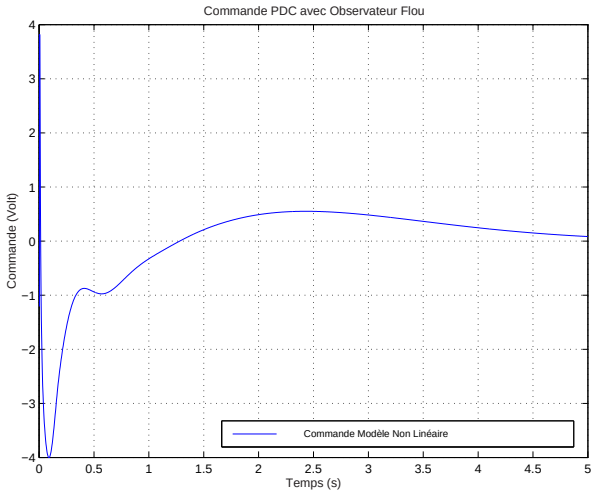


Figure 4.18. : Loi de commande PDC avec observateur flou : Commande u avec les CI $x(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0,5\ 0,5]^T$ et $\hat{x}(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0\ 0]^T$.

Sur ces premiers essais effectués en temps réel, il semble que la loi de commande PDC permet d'éviter des décrochements constatés sur la loi de commande linéaire. Sur les courbes présentées, le temps de stabilisation est à peu près identique, on notera toutefois, que la commande linéaire atteint la valeur de saturation -4.

4.5. Stabilisation du double pendule en temps réel

Pour les différents essais effectués sur la maquette réelle, l'observateur flou décrit dans le §4.4.1.2 est utilisé. Les mêmes matricesQ_o et R_o sont conservées pour calculer les différents gains d'observations K_1 à K_8. Les conditions initiales sur les angles θ et β sont prises respectivement dans les intervalles $[-0,2\text{rad}\ 0,2\text{rad}]$ et $[-0,15\text{rad}\ 0,15\text{rad}]$.

Le paragraphe suivant présente la première approche utilisée, basée sur une commande linéaire basée sur une synthèse quadratique.

4.5.1. Loi de commande linéaire quadratique

Ces essais constituent le premier jeu d'essais effectués sur le pendule réel.

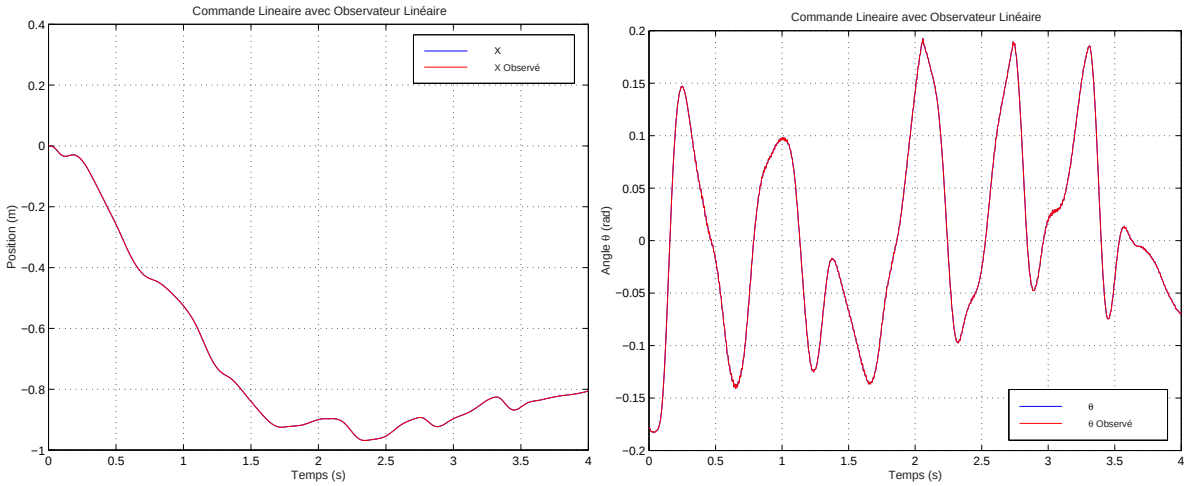


Figure 4.19. : Loi de commande Linéaire avec observateur linéaire : x et θ avec les CI $x(0) = [0 \ -0,17 \ -0,15 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

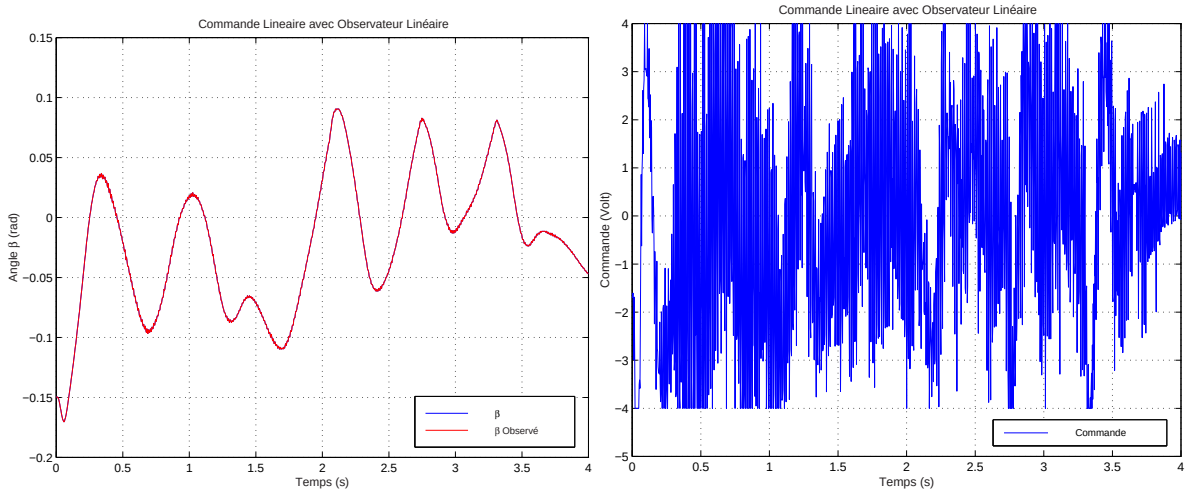


Figure 4.20. : Loi de commande linéaire avec observateur linéaire : β et u avec les CI $x(0) = [0 \ -0,17 \ -0,15 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

La loi de commande obtenue permet de stabiliser le double pendule, en présentant de fortes oscillations autour de 0.

4.5.2. Loi de commande PDC

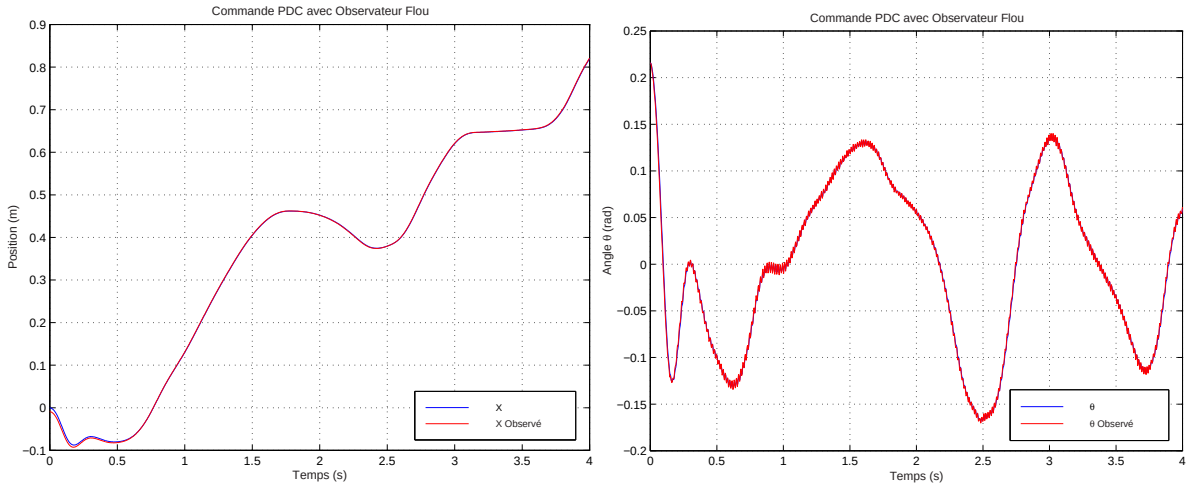


Figure 4.21. : Loi de commande PDC avec observateur flou : Variables d'états observables x θ avec les CI $x\,(0) = [0\ 0,2\ 0,1\ 0\ 0\ 0]^T$.

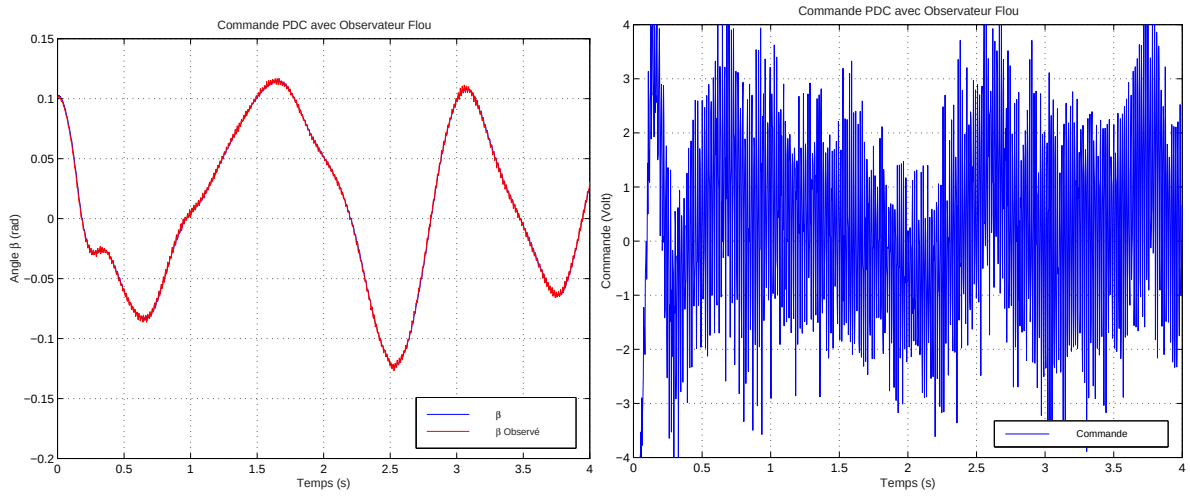


Figure 4.22. : Loi de commande PDC avec observateur flou : β et u avec les CI $x\,(0) = [0\ 0,22\ 0,1\ 0\ 0\ 0]^T$.

La loi de commande PDC présente de meilleures performances que la loi linéaire, tout en gardant des oscillations autour de 0. Ces dernières sont dues à la bande morte du pendule.

4.6. Conclusion

Ce quatrième chapitre a permis de présenter une application de modélisation et de commande sur un double pendule inversé. Après une modélisation basée sur les équations dynamiques du système, un modèle flou a été obtenu à partir de plusieurs remarques permettant de réduire le nombre de règles. Ce dernier a permis la mise en œuvre d'un observateur flou composé de 8 règles.

Des essais ont été menés en simulation pour déterminer les domaines de validité de lois de commandes de type linéaire et de type PDC. Enfin, quelques essais ont été menés sur le système réel. Pour le moment, ces derniers essais ne sont pas concluants, et cela est principalement dû aux paramètres du modèle qui nécessitent d'être estimés plus finement, les frottements notamment. Ceci devra être réalisé à partir d'une optimisation de type heuristique par exemple.

Enfin, pour pouvoir piloter ce système avec des conditions initiales sur les angles quelconques, il sera nécessaire d'adjoindre une commande non linéaire de type séquence de balancement, qui avait été réalisée pour le simple pendule [Vermeiren, 1998]. Il conviendra alors d'affiner l'observateur flou, pour permettre de passer de cette loi de commande à une loi de type PDC avec des conditions initiales sur les vitesses qui ne seront pas nulles.

Chapter 5

Perspectives

«La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne. La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi.»
Albert Einstein.

LE DÉBUT du chapitre 2 montre des façons de transformer un système non linéaire affine en la commande en un modèle flou de type T-S, ainsi que l'importance de ces transformations sur la conservativité des résultats obtenus en stabilité et surtout en stabilisation. Le dernier chapitre propose alors des pistes permettant dans certains cas de réduire le nombre de règles d'un modèle flou ou d'un observateur flou en utilisation une mise sous une forme régulière du modèle non linéaire.

Sommaire

5.1. Introduction 111
5.2. Transformation des modèles T-S 112
5.3. Exemple 1 112
5.4. Exemple 2 114

5.1. Introduction

Il semble que les commandes des modèles flous de type T-S arrivent à une certaine "maturité". Le début du chapitre 2 a montré des façons de transformer un système non linéaire affine en la commande en un modèle flou de type T-S, ainsi que l'importance de ces transformations sur la conservativité des résultats obtenus en stabilité et surtout en stabilisation. La conservativité des résultats est évidemment due au fait de rechercher

une matrice $P > 0$ unique pour tous les sous-modèles. En premier lieu, arriver à réduire le nombre de sous-modèles est donc capital. En second lieu, pour un nombre de sous-modèles donné, c'est la structure de ces sous-modèles qui peut se révéler importante. Par exemple, avec un modèle de type T-S ayant la propriété : $\forall i,\ B_i = B$ et une loi de type PDC, il n'y a pas de sous-modèles croisés pour le modèle bouclé, ce qui permet d'éviter la conservativité due aux LMIs croisées. Un autre exemple que l'on peut prendre concerne le cas particulier des modèles flous T-S, rencontré plusieurs fois au cours de ce mémoire, $\forall i,\ \exists k_i > 0\ B_i = k_i B$. Avec une loi de type PDC il est nécessaire de vérifier $\frac{r(r+1)}{2}$LMIs. La loi PDC remplacée par une loi CDF ramène ce nombre à r ce qui réduit la conservativité des résultats.

Dans ce contexte, ce dernier chapitre propose des pistes de travail permettant de se ramener vers des modèles possédant une des deux propriétés sur les matrices d'entrée.

5.2. Transformation des modèles T-S

En considérant un modèle flou de type T-S :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) C_i x(t) \end{cases} \tag{5.1}$$

le but est alors de se ramener à un modèle de la forme suivante, qui correspond à une mise sous une forme régulière (5.2) :

$$\begin{cases} \dot{s}_1(t) = f_1^R(s(t)) + D(s(t)) v(t) \\ \dot{s}_2(t) = f_2^R(s(t)) \end{cases} \tag{5.2}$$

avec $s_1(t) \in \mathbb{R}^m$ et $s_2(t) \in \mathbb{R}^{n-m}$ et où $D(s)$ est une matrice diagonale de rang plein sur le domaine de validité de la transformation et $v(t)$ est le nouveau vecteur des entrées. L'intérêt de cette transformation est de se ramener à la forme suivante d'un modèle T-S :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) (A_i x(t) + B u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) C_i x(t) \end{cases} \tag{5.3}$$

Cette forme permet donc de ne conserver à chaque fois que r LMIs pour la recherche d'une loi de commande de type PDC. Un contexte général peut être donné faisant appel à une transformation de type difféomorphisme [Guerra *et al.*, 2000].

Pour illustrer ces propos, et l'intérêt de cette démarche, deux exemples sont pris en compte.

5.3. Exemple 1

On considère le modèle non linéaire suivant : $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f(x_1(t)) + \frac{x_2(t)+u(t)}{1+x_2^2(t)} \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) x_2(t) + 2x_1(t) u(t) \end{cases}$
avec une fonction f non linéaire quelconque vérifiant : $f(0) = 0$, $f_{min} \leq f(x_1) \leq f_{max}$ et

$\forall x_2$, $|x_2| < b$. On peut écrire pour $x_1(t) \in [-a\ ,\ a]$ et $x_2(t) \in [-b\ ,\ b]$:
$x_1(t) = \frac{x_1(t)+a}{2a} \cdot a + \frac{a-x_1(t)}{2a} \cdot (-a)$, $x_2^2(t) = \frac{x_2^2(t)}{b^2} \cdot b^2 + \frac{1-x_2^2(t)}{b^2} \cdot 0$
et $f(x_1) = h_1(x_1)\,\alpha + h_2(x_1)\,\beta$ avec : $h_1(x_1) = \frac{f(x_1)-f_{min}}{f_{max}-f_{min}}$, $h_2(x_1) = \frac{f_{max}-f(x_1)}{f_{max}-f_{min}}$, $\alpha = f_{max}$ et $\beta = f_{min}$.

En utilisant 8 règles il est alors possible de proposer pour $x_1(t) \in [-a\ ,\ a]$ et $x_2(t) \in [-b\ ,\ b]$ un modèle T-S représentant le modèle non linéaire.

Si on recherche maintenant une forme régulière, le vecteur d'entrée s'écrivant :

$$g(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+x_2^2} \\ 2x_1 \end{bmatrix}.$$

La fonction $\lambda(x) = -x_1^2 + \arctan(x_2)$ est telle que : $\frac{\partial \lambda(x)}{\partial x} \cdot g(x) = 0$, ce qui permet de définir le difféomorphisme suivant :

$$\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = -x_1^2 + \arctan(x_2) \end{cases},$$

qui est global puisque le Jacobien est donné par :

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2x_1 & \frac{1}{1+x_2^2} \end{bmatrix}.$$

Avec ce changement de variables on aboutit au modèle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = f(z_1(t)) + \frac{\tan\left(z_2(t)+z_1^2(t)\right)+u(t)}{1+\tan^2\left(z_2(t)+z_1^2(t)\right)} \\ \dot{z}_2(t) = -2z_1(t)\,f(z_1(t)) \end{cases}.$$

Avec : $u(t) = -x_2(t) + (1+x_2^2(t))\,(v(t) - f(x_1(t)))$ on aboutit à :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = v(t) \\ \dot{z}_2(t) = -2z_1(t)\,f(z_1(t)) \end{cases}. \tag{5.4}$$

En utilisant (5.4) on aboutit donc au modèle T-S suivant à deux règles :
Si $x_2(t)$ est $h_1(x_2(t))$ alors : $\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2f_{max} & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$,
Si $x_2(t)$ est $h_2(x_2(t))$ alors : $\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2f_{min} & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$.

En choisissant une PDC, i.e. : $u(t) = (h_1(x_1(t))\,F_1 + h_2(x_1(t))\,F_2)\,z(t)$ il suffit de déterminer $P = X^{-1}$, $M_1 = F_1X^{-1}$ et $M_2 = F_2X^{-1}$ qui vérifient les LMIs suivantes :

$$i = 1,\ 2\ XA_i^T + A_iX - B_iM_i - M_i^TB_i^T < 0$$

Enfin, la loi de commande obtenue est alors de la forme :

$$\begin{aligned} u(t) \;=\; & -x_2(t) + \left(1+x_2^2(t)\right) \cdot \\ & \left((h_1(x_1(t))\,F_1 + h_2(x_1(t))\,F_2) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ -x_1^2(t) + \arctan(x_2(t)) \end{bmatrix} - f(x_1(t)) \right). \end{aligned}$$

Notons, évidemment, que si ce type de mise sous forme régulière peut s'avérer intéressante dans certains cas, elle ne peut l'être dans un contexte général. La raison est simplement due au fait que, si ce type de transformation permet d'obtenir de bonnes propriétés sur les matrices des entrées, elle peut "complexifier" le reste du modèle, i.e. introduire plus de non linéarités et donc un nombre de découpages plus important.

5.4. Exemple 2

On considère le modèle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1^2(t) + x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - 4x_1^3(t) - 2x_1(t)\,x_2(t) - 2x_1(t)\,u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

On peut écrire pour $x_1(t) \in [-a\ ,\ a]$:
$x_1(t) = \frac{x_1(t)+a}{2a} \cdot a + \frac{a-x_1(t)}{2a} \cdot (-a)$, $x_1^2(t) = \frac{x_1^2(t)}{a^2} \cdot a^2 + \frac{1-x_1^2(t)}{a^2} \cdot 0$ qui permet d'écrire un modèle flou TS avec 4 règles, donc un observateur flou à 4 règles également avec :
$A_1 = \begin{bmatrix} 2a & 1 \\ 1-4a^2 & -2a \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 2a & 1 \\ 1 & -2a \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} -2a & 1 \\ 1-4a^2 & 2a \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} -2a & 1 \\ 1 & -2a \end{bmatrix}$,
$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2a \end{bmatrix}$, $B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2a \end{bmatrix}$ et $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Si on utilise les conditions de stabilité classiques associées à une loi de type PDC, on aboutit à des résultats très conservatifs : on ne peut prouver la stabilité que si $a < 0,707$.

On peut alors déterminer un difféomorphisme qui permette une mise sous forme régulière et l'obtention d'une loi de commande. Le vecteur d'entrée s'écrit : $g(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2x_1 \end{bmatrix}$.
$\lambda(x) = x_1^2 + x_2$ est telle que : $\frac{\partial \lambda}{\partial x} \cdot g(x) = 0$, ce qui permet de définir le difféomorphisme suivant : $\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = x_1^2 + x_2 \end{cases}$, qui est global puisque le Jacobien est donné par : $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2x_1 & 1 \end{bmatrix}$.
Avec ce changement de variables on aboutit au modèle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_1^2(t) + z_2(t) + u(t) \\ \dot{z}_2(t) = z_1(t) \end{cases} .$$

Clairement, ce dernier peut toujours être stabilisé en utilisant une loi de commande du type : $u(t) = -z_1^2(t) + f_1 z_1(t) + f_2 z_2(t)$. Avec par exemple, $f_1 = -2$ et $f_2 = -2$ la loi de commande obtenue est : $u(t) = -3x_1^2(t) - 2x_1(t) - 2x_2(t)$.

L'intérêt cette fois-ci est de pouvoir associer cette loi de commande non linéaire avec un observateur flou. Ce dernier est en plus très simple à obtenir puisqu'il suffit de le réaliser sur le nouveau modèle flou obtenu, le nombre de règles passant de 4 à 2.

Ce dernier peut être obtenu très facilement, sans recours aux LMIs puisque avec $\forall i,\ C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ et le découpage de $x_1(t)$ il est possible de construire un observateur tel que : $A_1 - K_1 C = A_2 - K_2 C$. En se fixant un but en observation, par exemple, $P_{ButObservation}(p) = p^2 + 4p + 4$, il vient immédiatement :

$K_1 = \begin{bmatrix} 4-a \\ 5 \end{bmatrix}$, $K_2 = \begin{bmatrix} 4+a \\ 5 \end{bmatrix}$

La structure générale de l'observateur est alors donnée par :

Si $x_1(t)$ est $h_1(x_1(t))$ alors : $\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 4-a \\ 5 \end{bmatrix} (y(t) - \hat{y}(t))$

Si $x_1(t)$ est $h_2(x_1(t))$ alors : $\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 4+a \\ 5 \end{bmatrix} (y(t) - \hat{y}(t))$

et : $\begin{cases} x_1 = z_1 \\ \hat{x}_2 = \hat{z}_2 - x_1^2 \end{cases}$. A titre d'illustration, la figure donne un exemple de réponse pour les conditions initiales suivantes : $x(0) = [0,5\ 0,7]^T$ et $\hat{x}(0) = [0,5\ 0]^T$.

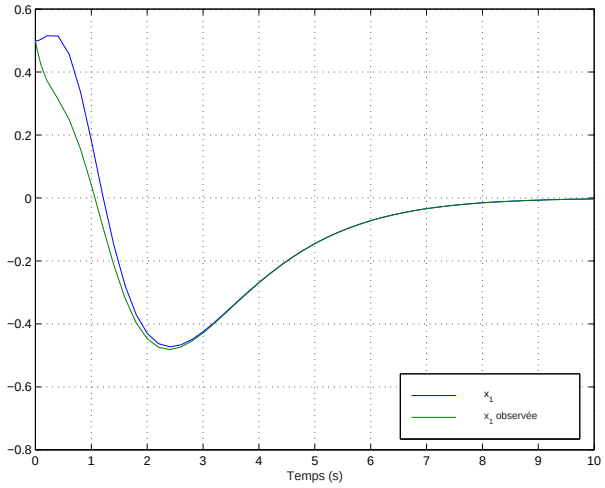


Figure 5.1. : Variables $x_1$avec les CI $x(0) = [0,5\ 0,7]^T$ et $\hat{x}(0) = [0,5\ 0]^T$.

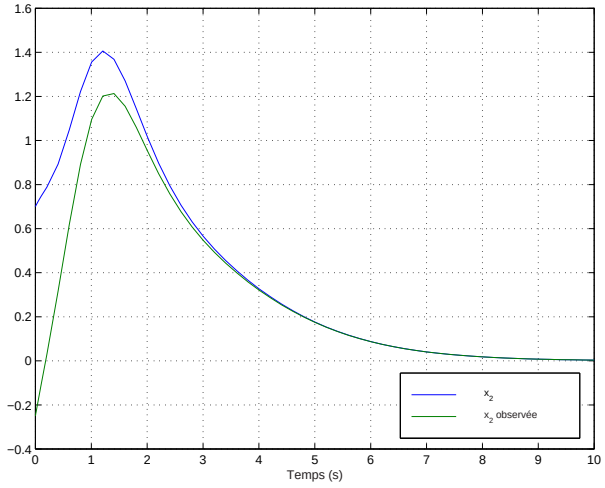


Figure 5.2. : Variables $x_2$avec les CI $x(0) = [0,5\ 0,7]^T$ et $\hat{x}(0) = [0,5\ 0]^T$.

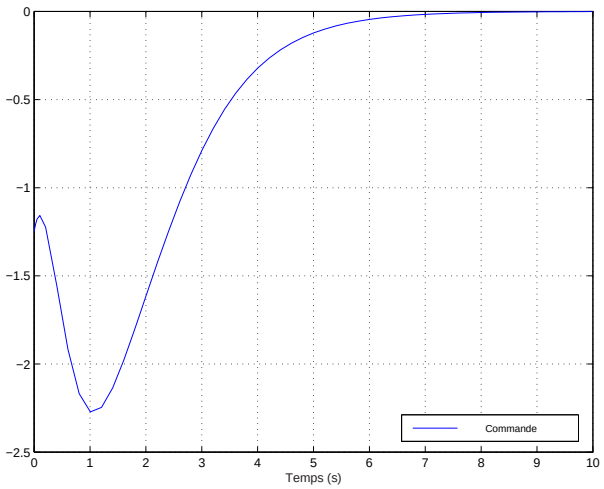


Figure 5.3. : Commande u avec les CI $x(0) = [0,5\ 0,7]^T$ et $\hat{x}(0) = [0,5\ 0]^T$.

En conclusion de ce dernier chapitre, il semble très intéressant de pouvoir utiliser des transformations sur les modèles flous de type T-S. Il faudrait étudier le cas général permettant de ramener un modèle de T-S, éq. (5.1) vers un modèle sous forme régulière (5.3). Au delà de cela il semble également intéressant de trouver s'il existe une classe spécifique de ces modèles où cette transformation s'avère réellement judicieuse, plutôt que de réaliser, comme cela a été le cas ici, une étude au cas par cas.

On peut alors arriver à "mélanger" les outils issus de la commande floue et les outils issus du non linéaire. Le deuxième exemple en est une bonne illustration puisqu'il permet d'associer de façon simple une loi de commande non linéaire et un observateur flou.

Conclusion Générale

«Il est rare de trouver un homme qui se livre trois ans à l'étude, sans avoir en vue un salaire...»

Confucius, Philosophe, historien et homme d'État chinois. Extrait de "Entretiens du Maître avec ses disciples".

CETTE THÈSE a traîté de la mise en œuvre de lois de commande pour les modèles flous de types Takagi-Sugeno.

Le premier chapitre a proposé un rapide rappel sur la commande floue basée sur la recopie du savoir faire d'un opérateur humain, et quelques types de régulateur que l'on trouve classiquement dans la littérature. La plupart des notions que l'on retrouve dans ce contexte correspondent à des extensions du cas linéaire, RF-PID, modèle interne flou, modes glissants flous etc. Les approches plus récentes se placent dans l'espace d'état et utilisent des modèles de type Takagi Sugeno. Ils peuvent être obtenus soit par identification entrée/sortie soit à partir d'un modèle non linéaire. Il semble difficile de justifier le mot "flou" dans ce contexte, puisqu'il n'est plus du tout fait appel à un expert qui a une connaissance subjective du procédé, mais bien à des outils mathématiques qui permettent une mise sous la forme d'un modèle T-S. Il reste bien évidemment, que sans le passé dû à la commande floue, ce type de modèles n'aurait peut-être jamais vu le jour. Le premier chapitre présente alors les résultats les plus couramment utilisés en stabilité et stabilisation pour ce type de modèles flous, aussi bien en continu qu'en discret.

Si on se place dans le cas d'une approche basée sur des fonctions de Lyapunov quadratiques, il semble qu'il n'y ait plus grand chose à gagner par rapport aux travaux de [Tanaka *et al.*, 1998]. Il nous semble alors, que si l'on garde une approche de type quadratique, l'effort doit être porté soit sur la modélisation, nombre de règles d'un modèle T-S, structure des matrices, par exemple, soit sur la loi de commande à appliquer. Ces deux points font l'objet du deuxième chapitre, et on montre qu'il est possible d'améliorer la conservativité des résultats en modifiant la loi de commande. Il semble également que

toute amélioration se fait au détriment de quelque chose. Dans le cas du changement de la loi de commande, les conditions deviennent des BMIs au lieu de LMIs.

Une deuxième façon d'envisager une amélioration est alors de "quitter" le cadre quadratique. Le troisième chapitre propose un contexte d'études utilisant des fonctions de Lyapunov non quadratiques prenant en compte les prémisses des modèles flous. Les conditions obtenues contiennent de fait celles du cas quadratique, et permettent donc de diminuer la conservativité des résultats. Cette fois-ci l'amélioration se fait au détriment du nombre de conditions LMIs mises en œuvre.

Une application à un double pendule inversé est proposée dans le chapitre quatre. Une modélisation permet de proposer un modèle non linéaire, qui est ensuite transformé et réduit à un modèle flou à 8 règles qui sert de base à la construction d'un observateur flou. Deux types de lois de commande ont été proposées ainsi que quelques essais sur le système réel.

Enfin, le dernier chapitre revient sur l'effort qui doit être apporté à la mise sous la forme d'un modèle de type T-S. Une mise sous forme régulière par l'intermédiaire d'une transformation sur les variables d'état peut, d'une part, permettre de réduire le nombre de non linéarités présentes, et d'autre part, mettre le modèle T-S dans une forme particulière des matrices d'entrée qui réduit le nombre de conditions à vérifier.

Pour terminer ce mémoire, plusieurs remarques peuvent être faites. On a fait de moins en moins de flou pour faire de plus en plus de commande, quelques améliorations ont pu être proposées sans pouvoir faire "sauter" quelques uns des "verrous" inhérents à ce type de méthodes. On peut effectivement se poser certaines questions.

Les notions de performance, qui sont capitales pour les systèmes réels, sont très difficiles à formaliser en utilisant les LMIs, et il est alors nécessaire d'avoir recours à des "mélanges" pas forcément "orthodoxes".

En restant dans un contexte "flou", peut-on encore envisager d'introduire des connaissances subjectives a priori dans ce type d'études ?

Au lieu de considérer ce type d'approche, qui revient à utiliser des outils classiques de l'automatique à d'autres outils venant, même de loin, du flou, il serait certainement judicieux de proposer des notions utilisant le potentiel des ensembles flous, vers une théorie de la stabilité floue ?

Références

[Anderson, 1989] C.W. Anderson. Learning to control an inverted pendulum using neural networks. *IEEE Controls Systems Magazine*, 9 :31–37, 1989.

[Aracil *et al.*, 1993] J. Aracil, A. García-Cerezo, A. Barreiro, et A. Ollero. *Stability analysis of fuzzy control systems based on the conicity criterion.* Fuzzy logic : State of the art. Kluwer Academic Publisher, 1993.

[Aström et Furuta, 1996] K.J. Aström et K. Furuta. Swinging up a pendulum by energy control. Dans *IFAC, 13th World Congress, San Francisco*, 1996.

[Blanco *et al.*, 1999] Y. Blanco, M. Borne, T.M. Guerra, et W. Perruquetti. Stabilisation du modèle Takagi-Sugeno à l'aide de fonctions Lyapunov non quadratiques. Dans *LFA'99, Valenciennes*, 1999.

[Blanco *et al.*, 2000] Y. Blanco, T.M. Guerra, W. Perruquetti, Y. Morère, et P. Borne. Non quadratic stability and stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy models. 2000. Soumise à IEEE Transactions on Fuzzy Systems.

[Bülher, 1994] H. Bülher. *Réglage par logique floue.* Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1994.

[Boissonat *et al.*, 1988] J.D. Boissonat, B. Faverjon, et J.P. Merlet. *Techniques de la Robotique : Architecture et commandes.* Traité des Nouvelles Technologies série robotique. Hermès, 1988.

[Borne *et al.*, 1993a] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy ans J.P. Richard, F. Rotella, et I. Zambettakis. *Analyse et Régulation des Processus Industriels*, volume 4. Éditions Technip, 1993.

[Borne *et al.*, 1993b] P. Borne, J.P. Richard, et N.E. Radhy. *Stabilité, stabilisation, régulation : approche par les normes vectorielles*, volume 2 de *Systèmes non linéaires : Stabilité - stabilisation.* Masson Editeur, 1993.

[Boukezzoula *et al.*, 1998] R. Boukezzoula, S. Galichet, et L. Foulloy. Apprentissage de lois de commandes floues pour des systèmes non linéaire (synthèse directe et indirecte)). Dans *Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications*, 1998.

[Boyd *et al.*, 1994] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, et V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, volume 15 de *Studies in Applied Mathematics.* SIAM, Philadelphia, 1994.

[Braee et Rutherford, 1979] M. Braee et D.A. Rutherford. Selection of parameters for a fuzzy logic controller. *Fuzzy Sets and Systems*, 2 :185–199, 1979.

[Cao *et al.*, 1996] S. Cao, N. Rees, et G. Feng. Stability analysis and design for a class of continuous-time fuzzy control systems. *Int. J. Control*, 64(6) :1069–1087, 1996.

[Cheng *et al.*, 1996] F. Cheng, G. Zhong, Y. Li, et Z. Xu. Fuzzy control of a double inverted pendulum. *Fuzzy Sets and Systems*, 79 :315–321, 1996.

[de Larminat, 1993] P. de Larminat. *Commande des systèmes linéaires*. Automatique. Hèrmes, 1993.

[de Oliveira *et al.*, 1999] J.V. de Oliveira, J. Bernussou, et J.C. Geromel. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37 :261–265, 1999.

[Driankov *et al.*, 1993] D. Driankov, H. Hellendoorn, et M. Reinfranck. *An introduction to fuzzy control*. Springer, Berlin Heidelberg, 1993.

[El Ghaoui, 1997] L. El Ghaoui. LMI approach for control : an introduction. Dans *Control summer school Grenoble, robust identification and control : LMI approach*, pages 1–25, 1997.

[Feng *et al.*, 1997] G. Feng, S.G. Cao, N.W. Rees, et C.K. Chak. Design of fuzzy control systems with guaranteed stability. *Fuzzy Sets and Systems*, pages 1–10, 1997.

[Fisher *et al.*, 1997] M. Fisher, M. Schmidt, et K. Kavsel-Biasizzo. Nonlinear predictive control based on the extraction of step response models from takagi-sugeno fuzzy systems. Dans *Proc. of the American Control Conference*, pages 1210–1216, 1997.

[Fuh et Tung, 1997] C.C. Fuh et P.C. Tung. Robust stability analysis of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, pages 289–298, 1997.

[Furuta *et al.*, 1994] K. Furuta, T. Okutani, et H. Sone. Computer control of a double inverted pendulum. *Computer Electrical Engeneering*, 5 :67–84, 1994.

[Gahinet *et al.*, 1995] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. Laub, et M. Chilali. *LMI Control Toolbox*. The Mathworks Inc., Natick, MA, 1995.

[Galichet et Foulloy, 1995] S. Galichet et L. Foulloy. Fuzzy controllers : synthesis and equivalences. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 3 :140–148, 1995.

[Guerra *et al.*, 1999] T.M. Guerra, L. Vermeiren, F. Delmotte, et P. Borne. Lois de commande pour systèmes flous continus. *APII-JESA, Hèrmes Science*, pages 489–527, 1999.

[Guerra *et al.*, 2000] T.M. Guerra, W. Perruquetti, Y. Morère, et Y. Blanco. Quelques remarques sur la stabilisation par retour d'état et de sortie des modèles Takagi-Sugeno. Note interne, 2000.

[Guerra et Ouattara, 1993] T.M. Guerra et S. Ouattara. Panorama des concepts et évolution des applications de la commande floue. Dans *Actes 1er Congrès AFCET*, pages 1–10, 1993.

[Guerra et Vermeiren, 1998] T.M. Guerra et L. Vermeiren. Control laws for continuous fuzzy systems. Dans *Advanced Computer Systems*, pages 368–375, Szczecin, Poland, 1998.

[Guerra et Vermeiren, 2000] T.M. Guerra et L. Vermeiren. Control laws for Takagi-Sugeno fuzzy models. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000. à paraître.

[Henrion et Tarbouriech, 1999] D. Henrion et S. Tarbouriech. LMI relaxations for robust stability of linear systems with saturating controls. *Automatica*, 35 :1595–1604, 1999.

[Holmblad et Østergaard, 1982] L. Holmblad et J. Østergaard. Control of a cement kiln by fuzzy logic. Dans *Fuzzy Information and Decision Processes*, éditeurs M. Gupta et E. Sanchez, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[Jacob, 1995] D. Jacob. Calcul des correcteurs pid par la méthode des moments pour les systèmes instables en boucle ouverte : Application au contrôle d'un pendule inversé. *Revue d'Automatique et de Productique Appliquées*, 8(4) :585–608, 1995.

[Johansson, 1999] M. Johansson. *Piecewise Linear Control Systems*. Thèse de Doctorat, Lund Institute of Technology, 1999.

[Kandel *et al.*, 1993] A. Kandel, L. Li, et Z. Cao. Fuzzy inference and its applicability to control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 48 :99–111, 1993.

[Kaufmann, 1973] A. Kaufmann. *Introduction à la théorie des sous-ensemble flous Tome 1 : Éléments théoriques de base*. Masson & Cie, Paris, 1973.

[Kim *et al.*, 1995] W.C. Kim, S.C. Ahn, et W.H. Kwon. Stability analysis and stabilization of fuzzy state space models. *Fuzzy Sets and Systems*, 71 :131–142, 1995.

[Lebrun, 1997] P. Lebrun. Réalisation et commande d'un pendule inversé, 1997. Mémoire diplôme d'ingénieur CNAM.

[Lee, 1990a] C.C. Lee. Fuzzy logic in control systems : fuzzy logic controller - part I. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 20 :404–418, 1990.

[Lee, 1990b] C.C. Lee. Fuzzy logic in control systems : fuzzy logic controller - part II. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 20 :419–435, 1990.

[Leung *et al.*, 1996] F.H.F. Leung, L.K. Wong, et P.K.S. Tam. Fuzzy model based controller for an inverted pendulum. *Electronics Letters*, 32(18) :1683–1685, 1996.

[Lo et Kuo, 1998] J.C. Lo et Y.H. Kuo. Decoupled fuzzy sliding-mode control. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(3) :426–435, 1998.

[Loftia, 1999] A. Loftia. Two stage inverted pendulum. Internet : http://marg.ntu.ac.uk/~lotfia/course/twostage.htm, 1999.

[Lopez et Foulc, 1984] P. Lopez et J.N. Foulc. *Introduction à la Robotique*. P.S.I. Éditest, 1984.

[Ma *et al.*, 1998] X.J. Ma, Z.Q. Sun, et Y.Y. He. Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(1) :41–50, 1998.

[Mandani, 1974] E.H. Mandani. Application of fuzzy algorithm for control of simple dynamic plant. Dans *IEE*, volume 121, pages 1585–1588, 1974.

[Marin et Titli, 1996] J.P. Marin et A. Titli. Robust performance of closed-loop fuzzy systems : a global Lyapunov approach. Dans *FUZZ'IEEE'96*, pages 732–737, New-Orleans, 1996.

[Melin et Ruiz, 1997] C. Melin et F. Ruiz. A passivity framework for fuzzy control system stability : case of two-input-single-output fuzzy controller. Dans *6th International conference on fuzzy systems*, pages 367–370, Barcelona, Spain, 1997.

[Melin et Vidolov, 1996] C. Melin et B. Vidolov. Stabilisation of linear systems by fuzzy controllers (Part I). *RAIRO-APII-JESA*, 30 (5) :675–705, 1996. (in french).

[Miyamoto *et al.*, 1987] S. Miyamoto, S. Yasunobu, et H. Ihara. Predictive fuzzy control and its application to automatic train operation systems. *Analysis of Fuzzy Information*, 1987. CRC Press, New York.

[Nakamori, 1994] Y. Nakamori. *Fuzzy modeling for adaptative process control*, chapitre Fuzzy control systems. A. Kanel and G. Langholz, 1994.

[Nesterov et Nemirovski, 1994] Yu. Nesterov et A. Nemirovski. *Interior point polynomial methods in convex programming : Theory and applications*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

[Nikoukhah *et al.*, 1995] R. Nikoukhah, F. Delebecque, et L. El Ghaoui. `LMITOOL` : a package for LMI optimization in Scilab, 1995. http://www-rocq.inria.fr/scilab/.

[Ollero *et al.*, 1993] A. Ollero, A. García-Cerezo, J. Aracil, et A. Barreiro. *Stability of fuzzy control systems*, chapitre An introduction to fuzzy control, pages 245–292. D. Driankov, 1993.

[Ollero *et al.*, 1995] A. Ollero, J. Aracil, et A. García-Cerezo. Robust design of rule-based fuzzy controllers. *Fuzzy Sets and Systems*, 70 :249–273, 1995.

[Ollero *et al.*, 1999] A. Ollero, J.P. Marin, A. García-Cerezo, et F. Cuesta. *Fuzzy Algorithms for Control*, chapitre 6. International Series In Intelligent Technologies. KAP, 1999.

[Ouattara, 1996] S. Ouattara. *Mise en oeuvre d'une loi de commande adaptative floue indirecte*. Thèse de Doctorat, Université de Valenciennes, 1996.

[Palm et Driankov, 1997] R. Palm et D. Driankov. Stability of fuzzy gain schedulers : Sliding mode based analysis. Dans *Proc. of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 177–183, 1997.

[Petersen, 1987] I.R. Petersen. A procedure for simultaneously stabilizing a collection of single input linear systems using non-linear state feedback control. *Automatica*, 28(1) :33–40, 1987.

[Raymond *et al.*, 1995] C. Raymond, S. Boverie, et A. Titli. Fuzzy multivariable control design from the fuzzy system model. Dans *Proceedings Sixth IFSA World Congress*, Sao Paulo, Brazil, 1995.

[Sugeno et Kang, 1988] M. Sugeno et G.T. Kang. Structure identification of fuzzy model. *Fuzzy Sets and Systems*, 28 :15–33, 1988.

[Takagi et Sugeno, 1985] T. Takagi et M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, 15(1) :116–132, 1985.

[Tanaka *et al.*, 1996] K. Tanaka, T. Ikeda, et H.O. Wang. Robust stabilization of a class of uncertain non linear system via fuzzy control : Quadratic stabilization, H^∞ control theory, and linear matrix inequalities. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(1) :1–13, 1996.

[Tanaka *et al.*, 1998] K. Tanaka, T. Ikeda, et H.O. Wang. Fuzzy regulators and fuzzy observers : Relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(2) :1–16, 1998.

[Tanaka et Sano, 1993] K. Tanaka et M. Sano. Fuzzy stability criterion of a class of nonlinear systems. *Information Sciences*, (71) :3–26, 1993.

[Tanaka et Sano, 1994] K. Tanaka et M. Sano. A robust stabilization problem of fuzzy control systems ans its application to backing up control of a truck-trailer. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2(2) :119–134, 1994.

[Tanaka et Sano, 1995] K. Tanaka et M. Sano. Trajectory stabilization of a model car via fuzzy control. *Fuzzy Sets and Systems*, 1(70) :155–170, 1995.

[Tanaka et Sugeno, 1990] K. Tanaka et M. Sugeno. Stability analysis of fuzzy systems using lyapunov's direct method. Dans *NAFIP'S 90*, pages 133–136, 1990.

[Tanaka et Sugeno, 1992] K. Tanaka et M. Sugeno. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 45(2) :135–156, 1992.

[Tanaka, 1995] K. Tanaka. Stability and stabilisability of fuzzy-neural-linear control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 3 :438–447, 1995.

[Terano *et al.*, 1988] T. Terano, S. Masui, K. Tanaka, et Y. Murayama. Fuzzy regulators and fuzzy observers : Relaxed stability conditions and lmibased designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(2) :1–16, 1988.

[Tirmant, 2000] H. Tirmant. Le doublependule inversé : Modélisation et simulation, 2000. Rapport de DEA.

[Van Der Linden et Lambrechts, 1993] G.W. Van Der Linden et P.F. Lambrechts. h^∞ control of an experimental inverted pendulum with dry friction. *IEEE Controls Systems Magazine*, 13 :44–50, 1993.

[Verbruggen *et al.*, 1999] H.B. Verbruggen, H.J. Zimmermann, et R. Babŭska. *Fuzzy algorithm for control*, chapitre 1. International Series In Intelligent Technologies. KAP, 1999.

[Vermeiren, 1998] L. Vermeiren. *Proposition de lois de commandes pour la stabilisation de modèles flous*. Thèse de Doctorat, Université de Valenciennes, 1998.

[Wang *et al.*, 1996] H.O. Wang, K. Tanaka, et M. Griffin. An approach to fuzzy control of non linear systems : Stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(1) :14–23, 1996.

[Wang, 1994] L.X. Wang. *Adaptative Fuzzy Systems and Control*. PTR Prentice Hall, 1994.

[Wei *et al.*, 1995] Q.F. Wei, W.P. Dayawansa, et W.S. Levine. Non linear controller for inverted pendulum having restricted travel. *Automatica*, 31(6) :841–850, 1995.

[Willaeys et Malvache, 1978] D. Willaeys et N. Malvache. Use of fuzzy model for process control. Dans *Proceedings of IEEE Conference on Cybernetics and Society*, Tokyo, 1978.

[Willems, 1972] J. Willems. Dissipative dynamical systems, part 1 : General theory. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 145 :321–351, 1972.

[Xie *et al.*, 1997] L. Xie, S. Shishkin, et M. Fu. Piecewise lyapunov functions for robust stability of linear time-varying systems. *Systems and Control Letters*, 31 :165–171, 1997.

[Yamakawa, 1989] T. Yamakawa. Stabilization of an inverted pendulum by a high-speed fuzzy logic controller hardware system. *Fuzzy Sets and Systems*, 32 :161–180, 1989.

[Ying *et al.*, 1990] H. Ying, W. Silver, et J.J. Buckley. Fuzzy control theory : a nonlinear case. *Automatica*, 26(3) :513–520, 1990.

[Zadeh, 1965] L.A. Zadeh. Information and control. *Fuzzy Sets*, 8 :338–353, 1965.

[Zhao *et al.*, 1996] J. Zhao, R. Gorez, et V. Wertz. Fuzzy controllers with garanteed robustness and performance. Dans *EUFIT'96*, pages 1886–1890, Aachen, 1996.

Table des figures

1.1. Vecteurs associés au régulateur flou et au modèle 15
1.2. Représentation du concept PDC [Wang *et al.*, 1996] 21
1.3. Représentation du système augmenté 26

2.1. Variables d'états du système avec les CI : $x(0) = [1 \ -1]^T$ 39
2.2. Commande du système 40
2.3. Algorithme de relaxation des BMIS par *LMIR1* et *LMIR2* 46
2.4. Résultats en simulation : Commande du modèle en boucle fermée avec $x\,(0) = [-0,5\ 0.2]^T$ et $\hat{x}\,(0) = [-0,5\ 0]^T$. 51
2.5. Résultats en simulation : Variables d'états du modèle en boucle fermée avec $x\,(0) = [-0,5\ 0,2]^T$ et $\hat{x}\,(0) = [-0,5\ 0]^T$. 51

3.1. Système de commande de séléction (gauche) et sa forme bouclée (droite) 57
3.2. Représentation des équipotentielles de Lyapunov 65
3.3. Représentation des variables d'état du système avec les CI $x_0 = [-20 \ -30]^T$ 66
3.4. Fonction de Lyapunov $V\,(x\,(t)) = \sum_i h_i\,(z)\,x^T P_i x$, $x_0 = [-20 \ -30]^T$ . . 67
3.5. Résultat en simulation : commande du système complet avec $x\,(0) = [0,5\ 0,1\ 0]^T$ et $\hat{x}\,(0) = [0,5\ 0\ 0]^T$. 76
3.6. Résultat en simulation : variables d'état (système + observateur) du système complet avec $x\,(0) = [0,5\ 0,1\ 0]^T$ et $\hat{x}\,(0) = [0,5\ 0\ 0]^T$ 77
3.7. Représentation des variables d'état du système avec les CI $x(0) = [0,2 \ -0,1]^T$ 78
3.8. Résultat en simulation : commande du système complet avec $x(0) = [0,2 \ -0,1]^T$ 79

4.1. La plate-forme d'essais : le simple pendule inversé 83
4.2. Passage du simple au double pendule inversé 84
4.3. Schéma de principe du double pendule inversé 85
4.4. La plate-forme d'essais : le double pendule inversé 85
4.5. Schéma de principe du double pendule inversé 86
4.6. Représentation des forces agissant sur le double pendule 88
4.7. Fonctions d'appartenance des ensembles flous 93

4.8. Loi linéaire avec observateur linéaire et observateur flou : Variables d'états non observables $\dot{\theta}$, $\dot{\beta}$ et commande u avec les CI $x(0) = [0\ 0,32\ 0,25\ 0\ 0\ 0]^T$ et $\hat{x}(0) = [0\ 0,32\ 0,25\ 0\ 0\ 0]^T$. 96
4.9. Loi linéaire avec observateur flou : Variables d'états non observables $\dot{\theta}$, $\dot{\beta}$ et avec les CI $x(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0,5\ 0,5]^T$ et $\hat{x}(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0\ 0]^T$. 97
4.10. Loi linéaire avec observateur flou : Variables d'états non observables $\dot{\theta}$, $\dot{\beta}$ et avec les CI $x(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0,5\ 0,5]^T$ et $\hat{x}(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0\ 0]^T$. 99
4.11. Région accessible pour une loi de commande linéaire. 100
4.12. Loi de commande linéaire avec observateur flou : x, θ et β avec les CI $x(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0,5\ 0,5]^T$ et $\hat{x}(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0\ 0]^T$. 101
4.13. Loi de commande linéaire avec observateur flou : $\dot{x}$, $\dot{\theta}$ et $\dot{\theta}$ avec les CI $x(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0,5\ 0,5]^T$ et $\hat{x}(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0\ 0]^T$. 102
4.14. Loi de commande linéaire avec observateur flou : Commande u avec les CI $x(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0,5\ 0,5]^T$ et $\hat{x}(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0\ 0]^T$. 103
4.15. Région accessible pour une loi de commande PDC. 103
4.16. Loi de commande PDC avec observateur flou : x, θ et β avec les CI $x(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0,5\ 0,5]^T$ et $\hat{x}(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0\ 0]^T$. 105
4.17. Loi de commande PDC avec observateur flou : $\dot{x}$, $\dot{\theta}$ et $\dot{\beta}$ avec les CI $x(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0,5\ 0,5]^T$ et $\hat{x}(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0\ 0]^T$. 106
4.18. Loi de commande PDC avec observateur flou : Commande u avec les CI $x(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0,5\ 0,5]^T$ et $\hat{x}(0) = [0\ 0,2\ 0,15\ 0\ 0\ 0]^T$. 107
4.19. Loi de commande Linéaire avec observateur linéaire : x et θ avec les CI $x(0) = [0\ -0,17\ -0,15\ 0\ 0\ 0]^T$. 108
4.20. Loi de commande linéaire avec observateur linéaire : β et u avec les CI $x(0) = [0\ -0,17\ -0,15\ 0\ 0\ 0]^T$. 108
4.21. Loi de commande PDC avec observateur flou : Variables d'états observables x θ avec les CI $x(0) = [0\ 0,2\ 0,1\ 0\ 0\ 0]^T$. 109
4.22. Loi de commande PDC avec observateur flou : β et u avec les CI $x(0) = [0\ 0,22\ 0,1\ 0\ 0\ 0]^T$. 109

5.1. Variables $x_1$avec les CI $x(0) = [0,5\ 0,7]^T$ et $\hat{x}(0) = [0,5\ 0]^T$. 115
5.2. Variables $x_2$avec les CI $x(0) = [0,5\ 0,7]^T$ et $\hat{x}(0) = [0,5\ 0]^T$. 115
5.3. Commande u avec les CI $x(0) = [0,5\ 0,7]^T$ et $\hat{x}(0) = [0,5\ 0]^T$. 116

Liste des tableaux

1.1. Récapitulatif des notations d'un modèle T-S 12

4.1. Tableau des variables du double pendule inversé. 88
4.2. Tableau des paramètres numériques du double pendule inversé. 95

Annexes

Appendix A

Le double pendule inversé

A.1. Modèle flou du double pendule inversé

Il est possible d'écrire le modèle flou de type Takagi-Sugeno du double pendule inversé. Ce modèle comporte 8 règles.

Les huit règles décrivant le modèle flou sont :

Règle 1 : Si $\theta(t)$ est F_1^1 et $\beta(t)$ est F_2^1 et $\cos(\theta(t)-\beta(t))$ est F_3^1 alors :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(P_2P_3-P_1P_5)P_1g}{den} & \frac{(-P_1P_3+P_2P_4)P_2g}{den} & \frac{-\left(P_4P_5-P_3^2\right)f}{den} \\ 0 & \frac{\left(MP_5-P_2^2\right)P_1g}{den} & \frac{-(MP_3-P_1P_2)P_2g}{den} & \frac{-(P_1P_5-P_2P_3)f}{den} \\ 0 & \frac{-(MP_3-P_1P_2)P_1g}{den} & \frac{\left(MP_4-P_1^2\right)P_2g}{den} & \frac{-(-P_1P_3+P_2P_4)f}{den} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{(-P_1P_5+P_2P_3-P_1P_3+P_2P_4)k_{O_2}+(-P_1P_5+P_2P_3)k_{O_1}}{den} & \frac{(P_1P_5-P_2P_3+P_1P_3-P_2P_4)k_{O_2}}{den} \\ \frac{\left(-MP_5+P_2^2-MP_3+P_1P_2\right)k_{O_2}+\left(-MP_5+P_2^2\right)k_{O_1}}{den} & \frac{\left(MP_5-P_2^2+MP_3-P_1P_2\right)k_{O_2}}{den} \\ \frac{\left(MP_3-P_1P_2+MP_4-P_1^2\right)k_{O_2}+(MP_3-P_1P_2)k_{O_1}}{den} & \frac{\left(-MP_3+P_1P_2-MP_4+P_1^2\right)k_{O_2}}{den} \end{bmatrix} x(t)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{P_4P_5-P_3^2}{den} \\ \frac{P_1P_5-P_2P_3}{den} \\ \frac{-P_1P_3+P_2P_4}{den} \end{bmatrix} u(t)$$

avec $den = MP_4P_5 + 2P_1P_2P_3 - P_2^2P_4 - MP_3^2 - P_1^2P_5$.

Règle 2 : Si $\theta(t)$ est F_1^1 et $\beta(y)$ est F_2^1 et $\cos(\theta(t)-\beta(t))$ est F_3^2 alors la représentation d'état est :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(P_2P_3-P_1P_5\cos(\theta_0+\beta_0))P_1g}{den} & \frac{(-P_1P_3\cos(\theta_0+\beta_0)+P_2P_4)P_2g}{den} & \frac{-\left(P_4P_5-P_3^2\cos^2(\theta_0+\beta_0)\right)f}{den} \\ 0 & \frac{\left(MP_5-P_2^2\right)P_1g}{den} & \frac{-(MP_3\cos(\theta_0+\beta_0)-P_1P_2)P_2g}{den} & \frac{-(P_1P_5-P_2P_3\cos(\theta_0+\beta_0))f}{den} \\ 0 & \frac{-(MP_3\cos(\theta_0+\beta_0)-P_1P_2)P_1g}{den} & \frac{\left(MP_4-P_1^2\right)P_2g}{den} & \frac{-(-P_1P_3\cos(\theta_0+\beta_0)+P_2P_4)f}{den} \end{bmatrix} x(t)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{(-P_1P_5+P_2P_3\cos(\theta_0+\beta_0)-P_1P_3\cos(\theta_0+\beta_0)+P_2P_4)k_{O_2}+(-P_1P_5+P_2P_3\cos(\theta_0+\beta_0))k_{O_1}}{den} \\ \frac{\left(-MP_5+P_2^2-MP_3\cos(\theta_0+\beta_0)+P_1P_2\right)k_{O_2}+\left(-MP_5+P_2^2\right)k_{O_1}}{den} \\ \frac{\left(MP_3\cos(\theta_0+\beta_0)-P_1P_2+MP_4-P_1^2\right)k_{O_2}+(MP_3\cos(\theta_0+\beta_0)-P_1P_2)k_{O_1}}{den} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{(P_1P_5-P_2P_3\cos(\theta_0+\beta_0)+P_1P_3\cos(\theta_0+\beta_0)-P_2P_4)k_{O_2}}{den} \\ \frac{\left(MP_5-P_2^2+MP_3\cos(\theta_0+\beta_0)-P_1P_2\right)k_{O_2}}{den} \\ \frac{\left(-MP_3\cos(\theta_0+\beta_0)+P_1P_2-MP_4+P_1^2\right)k_{O_2}}{den} \end{bmatrix} x(t)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{P_4P_5-P_3^2\cos^2(\theta_0+\beta_0)}{den} \\ \frac{P_1P_5-P_2P_3\cos(\theta_0+\beta_0)}{den} \\ \frac{-P_1P_3\cos(\theta_0+\beta_0)+P_2P_4}{den} \end{bmatrix} u(t)$$

avec $den = MP_4P_5 + 2P_1P_2P_3\cos(\theta_0+\beta_0) - P_2^2P_4 - MP_3^2\cos^2(\theta_0+\beta_0) - P_1^2P_5$.

Règle 3 : Si $\theta(t)$ est F_1^1 et $\beta(y)$ est F_2^2 et $\cos(\theta(t)-\beta(t))$ est F_3^1 alors la représentation d'état est :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(P_2P_3-P_1P_5\cos\beta_0)P_1g}{den} & \frac{(-P_1P_3+P_2P_4\cos\beta_0)P_2g\frac{\sin\beta_0}{\beta_0}}{den} & \frac{-\left(P_4P_5-P_3^2\right)f}{den} \\ 0 & \frac{\left(MP_5-P_2^2\cos^2\beta_0\right)P_1g}{den} & \frac{-(MP_3-P_1P_2\cos\beta_0)P_2g\frac{\sin\beta_0}{\beta_0}}{den} & \frac{-(P_1P_5-P_2P_3\cos\beta_0)f}{den} \\ 0 & \frac{-(MP_3-P_1P_2\cos\beta_0)P_1g}{den} & \frac{\left(MP_4-P_1^2\right)P_2g\frac{\sin\beta_0}{\beta_0}}{den} & \frac{-(-P_1P_3+P_2P_4\cos\beta_0)f}{den} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{(-P_1P_5+P_2P_3\cos\beta_0-P_1P_3+P_2P_4\cos\beta_0)k_{O_2}+(-P_1P_5+P_2P_3\cos\beta_0)k_{O_1}}{den} \\ \frac{\left(-MP_5+P_2^2\cos^2\beta_0-MP_3+P_1P_2\cos\beta_0\right)k_{O_2}+\left(-MP_5+P_2^2\cos^2\beta_0\right)k_{O_1}}{den} \\ \frac{\left(MP_3-P_1P_2\cos\beta_0+MP_4-P_1^2\right)k_{O_2}+(MP_3-P_1P_2\cos\beta_0)k_{O_1}}{den} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{(P_1P_5-P_2P_3\cos\beta_0+P_1P_3-P_2P_4\cos\beta_0)k_{O_2}}{den} \\ \frac{\left(MP_5-P_2^2\cos^2\beta_0+MP_3-P_1P_2\cos\beta_0\right)k_{O_2}}{den} \\ \frac{\left(-MP_3+P_1P_2\cos\beta_0-MP_4+P_1^2\right)k_{O_2}}{den} \end{bmatrix} x(t)$$

$$+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{P_4P_5-P_3^2}{den} \\ \frac{P_1P_5-P_2P_3\cos\beta_0}{den} \\ \frac{-P_1P_3+P_2P_4\cos\beta_0}{den} \end{bmatrix} u(t)$$

avec $den = MP_4P_5 + 2P_1P_2P_3\cos(\beta_0) - P_2^2P_4\cos^2(\beta_0) - MP_3^2 - P_1^2P_5$.

Règle 4 : Si $\theta(t)$ est F_1^1 et $\beta(y)$ est F_2^2 et $\cos(\theta(t)-\beta(t))$ est F_3^2 alors la représentation d'état est :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(P_2P_3\cos\beta_0\cos(\theta_0+\beta_0)-P_1P_5)P_1g}{den} & \frac{(-P_1P_3\cos(\theta_0+\beta_0)+P_2P_4\cos\beta_0)P_2g\frac{\sin\beta_0}{\beta_0}}{den} \\ 0 & \frac{\left(MP_5-P_2^2\cos^2\beta_0\right)P_1g}{den} & \frac{-(MP_3\cos(\theta_0+\beta_0)-P_1P_2)P_2g\frac{\sin\beta_0}{\beta_0}}{den} \\ 0 & \frac{-(MP_3\cos(\theta_0+\beta_0)-P_1P_2\cos\beta_0)P_1g}{den} & \frac{\left(MP_4-P_1^2\right)P_2g\frac{\sin\beta_0}{\beta_0}}{den} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-\left(P_4P_5-P_3^2\cos^2(\theta_0+\beta_0)\right)f}{den} \\ \frac{-(P_1P_5-P_2P_3\cos\beta_0\cos(\theta_0+\beta_0))f}{den} \\ \frac{-(-P_1P_3\cos(\theta_0+\beta_0)+P_2P_4\cos\beta_0)f}{den} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{(-P_1P_5+P_2P_3\cos\beta_0\cos(\theta_0+\beta_0)-P_1P_3\cos(\theta_0+\beta_0)+P_2P_4\cos\beta_0)k_{O_2}+(-P_1P_5+P_2P_3\cos\beta_0\cos(\theta_0+\beta_0))k_{O_1}}{den} \\ \frac{\left(-MP_5+P_2^2\cos^2\beta_0-MP_3\cos(\theta_0+\beta_0)+P_1P_2\cos\beta_0\right)k_{O_2}+\left(-MP_5+P_2^2\cos^2\beta_0\right)k_{O_1}}{den} \\ \frac{\left(MP_3\cos(\theta_0+\beta_0)-P_1P_2\cos\beta_0+MP_4-P_1^2\right)k_{O_2}+(MP_3\cos(\theta_0+\beta_0)-P_1P_2\cos\beta_0)k_{O_1}}{den} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{(P_1P_5-P_2P_3\cos\beta_0\cos(\theta_0+\beta_0)+P_1P_3\cos(\theta_0+\beta_0)-P_2P_4\cos\beta_0)k_{O_2}}{den} \\ \frac{\left(MP_5-P_2^2\cos^2\beta_0+MP_3\cos(\theta_0+\beta_0)-P_1P_2\cos\beta_0\right)k_{O_2}}{den} \\ \frac{\left(-MP_3\cos(\theta_0+\beta_0)+P_1P_2\cos\beta_0-MP_4+P_1^2\right)k_{O_2}}{den} \end{bmatrix} x(t)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{P_4P_5-P_3^2\cos^2(\theta_0+\beta_0)}{den} \\ \frac{P_1P_5-P_2P_3\cos\beta_0\cos(\theta_0+\beta_0)}{den} \\ \frac{-P_1P_3\cos(\theta_0+\beta_0)+P_2P_4\cos\beta_0}{den} \end{bmatrix} u(t)$$

avec $den = MP_4P_5+2P_1P_2P_3\cos(\beta_0)\cos(\theta_0+\beta_0)-P_2^2P_4\cos^2(\beta_0)-MP_3^2\cos^2(\theta_0+\beta_0)-P_1^2P_5$.

Règle 5 : Si $\theta(t)$ est F_1^2 et $\beta(y)$ est F_2^1 et $\cos(\theta(t)-\beta(t))$ est F_3^1 alors la représentation d'état est :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(P_2P_3-P_1P_5\cos\theta_0)P_1g\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}}{den} & \frac{(-P_1P_3\cos\theta_0+P_2P_4)P_2g}{den} & \frac{-\left(P_4P_5-P_3^2\right)f}{den} \\ 0 & \frac{\left(MP_5-P_2^2\right)P_1g\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}}{den} & \frac{-(MP_3-P_1P_2\cos\theta_0)P_2g}{den} & \frac{-(P_1P_5\cos\theta_0-P_2P_3)f}{den} \\ 0 & \frac{-(MP_3-P_1P_2\cos\theta_0)P_1g\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}}{den} & \frac{\left(MP_4-P_1^2\cos^2\theta_0\right)P_2g}{den} & \frac{-(-P_1P_3\cos\theta_0+P_2P_4)f}{den} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{(-P_1P_5\cos\theta_0+P_2P_3-P_1P_3\cos\theta_0+P_2P_4)k_{O_2}+(-P_1P_5\cos\theta_0+P_2P_3)k_{O_1}}{den} \\ \frac{\left(-MP_5+P_2^2-MP_3+P_1P_2\cos\theta_0\right)k_{O_2}+\left(-MP_5+P_2^2\right)k_{O_1}}{den} \\ \frac{\left(MP_3-P_1P_2\cos\theta_0+MP_4-P_1^2\cos^2\theta_0\right)k_{O_2}+(MP_3-P_1P_2\cos\theta_0)k_{O_1}}{den} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{(P_1P_5\cos\theta_0 - P_2P_3 + P_1P_3\cos\theta_0 - P_2P_4)k_{O_2}}{den} \\ \frac{\left(MP_5 - P_2^2 + MP_3 - P_1P_2\cos\theta_0\right)k_{O_2}}{den} \\ \frac{\left(-MP_3 + P_1P_2\cos\theta_0 - MP_4 + P_1^2\cos^2\theta_0\right)k_{O_2}}{den} \end{bmatrix} x(t)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{P_4P_5 - P_3^2}{den} \\ \frac{P_1P_5\cos\theta_0 - P_2P_3}{den} \\ \frac{-P_1P_3\cos\theta_0 + P_2P_4}{den} \end{bmatrix} u(t)$$

avec $den = MP_4P_5 + 2P_1P_2P_3\cos(\theta_0) - P_2^2P_4 - MP_3^2 - P_1^2P_5\cos^2(\theta_0)$.

Règle 6 : Si $\theta(t)$ est F_1^2 et $\beta(y)$ est F_2^1 et $\cos(\theta(t) - \beta(t))$ est F_3^2 alors la représentation d'état est :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(P_2P_3\cos(\theta_0+\beta_0) - P_1P_5\cos\theta_0)P_1g\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}}{den} & \frac{(-P_1P_3\cos\theta_0\cos(\theta_0+\beta_0) + P_2P_4)P_2g}{den} \\ 0 & \frac{\left(MP_5 - P_2^2\right)P_1g\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}}{den} & \frac{-(MP_3\cos(\theta_0+\beta_0) - P_1P_2\cos\theta_0)P_2g}{den} \\ 0 & \frac{-(MP_3\cos(\theta_0+\beta_0) - P_1P_2\cos\theta_0)P_1g\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}}{den} & \frac{\left(MP_4 - P_1^2\cos^2\theta_0\right)P_2g}{den} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-\left(P_4P_5 - P_3^2\cos^2(\theta_0+\beta_0)\right)f}{den} \\ \frac{-(P_1P_5\cos\theta_0 - P_2P_3\cos(\theta_0+\beta_0))f}{den} \\ \frac{-(-P_1P_3\cos\theta_0\cos(\theta_0+\beta_0) + P_2P_4)f}{den} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{(-P_1P_5\cos\theta_0 + P_2P_3\cos(\theta_0+\beta_0) - P_1P_3\cos\theta_0\cos(\theta_0+\beta_0) + P_2P_4)k_{O_2} + (-P_1P_5\cos\theta_0 + P_2P_3\cos(\theta_0+\beta_0))k_{O_1}}{den} \\ \frac{\left(-MP_5 + P_2^2 - MP_3\cos(\theta_0+\beta_0) + P_1P_2\cos\theta_0\right)k_{O_2} + \left(-MP_5 + P_2^2\right)k_{O_1}}{den} \\ \frac{\left(MP_3\cos(\theta_0+\beta_0) - P_1P_2\cos\theta_0 + MP_4 - P_1^2\cos^2\theta_0\right)k_{O_2} + (MP_3 - P_1P_2)k_{O_1}}{den} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{(P_1P_5\cos\theta_0 - P_2P_3\cos(\theta_0+\beta_0) + P_1P_3\cos\theta_0\cos(\theta_0+\beta_0) - P_2P_4)k_{O_2}}{den} \\ \frac{\left(MP_5 - P_2^2 + MP_3\cos(\theta_0+\beta_0) - P_1P_2\cos\theta_0\right)k_{O_2}}{den} \\ \frac{\left(-MP_3\cos(\theta_0+\beta_0) + P_1P_2\cos\theta_0 - MP_4 + P_1^2\cos^2\theta_0\right)k_{O_2}}{den} \end{bmatrix} x(t)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{P_4P_5 - P_3^2\cos^2(\theta_0+\beta_0)}{den} \\ \frac{P_1P_5\cos\theta_0 - P_2P_3\cos(\theta_0+\beta_0)}{den} \\ \frac{-P_1P_3\cos\theta_0\cos(\theta_0+\beta_0) + P_2P_4}{den} \end{bmatrix} u(t)$$

avec $den = MP_4P_5 + 2P_1P_2P_3\cos(\theta_0)\cos(\theta_0+\beta_0) - P_2^2P_4 - MP_3^2\cos^2(\theta_0+\beta_0) - P_1^2P_5\cos^2(\theta_0)$.

Règle 7 : Si $\theta(t)$ est F_1^2 et $\beta(y)$ est F_2^2 et $\cos(\theta(t) - \beta(t))$ est F_3^1 alors la représentation d'état est :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(P_2P_3\cos\theta_0 - P_1P_5\cos\beta_0)P_1g\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}}{den} & \frac{(-P_1P_3\cos\theta_0 + P_2P_4\cos\beta_0)P_2g\frac{\sin\beta_0}{\beta_0}}{den} \\ 0 & \frac{\left(MP_5 - P_2^2\cos^2\beta_0\right)P_1g\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}}{den} & \frac{-(MP_3 - P_1P_2\cos\theta_0\cos\beta_0)P_2g\frac{\sin\beta_0}{\beta_0}}{den} \\ 0 & \frac{-(MP_3 - P_1P_2\cos\beta_0\cos\theta_0)P_1g\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}}{den} & \frac{\left(MP_4 - P_1^2\cos^2\theta_0\right)P_2g\frac{\sin\beta_0}{\beta_0}}{den} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-\left(P_4P_5 - P_3^2\right)f}{den} \\ \frac{-(P_1P_5\cos\theta_0 - P_2P_3\cos\beta_0)f}{den} \\ \frac{-(-P_1P_3\cos\theta_0 + P_2P_4\cos\beta_0)f}{den} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{(-P_1P_5\cos\theta_0 + P_2P_3\cos\beta_0 - P_1P_3\cos\theta_0 + P_2P_4\cos\beta_0)k_{O_2} + (-P_1P_5\cos\theta_0 + P_2P_3\cos\beta_0)k_{O_1}}{den} \\ \frac{\left(-MP_5 + P_2^2\cos^2\beta_0 - MP_3 + P_1P_2\cos\theta_0\cos\beta_0\right)k_{O_2} + \left(-MP_5 + P_2^2\cos^2\beta_0\right)k_{O_1}}{den} \\ \frac{\left(MP_3 - P_1P_2\cos\theta_0\cos\beta_0 + MP_4 - P_1^2\cos^2\theta_0\right)k_{O_2} + (MP_3 - P_1P_2\cos\theta_0\cos\beta_0)k_{O_1}}{den} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{(P_1P_5\cos\theta_0 - P_2P_3\cos\beta_0 + P_1P_3\cos\theta_0 - P_2P_4\cos\beta_0)k_{O_2}}{den} \\ \frac{\left(MP_5 - P_2^2\cos^2\beta_0 + MP_3 - P_1P_2\cos\theta_0\cos\beta_0\right)k_{O_2}}{den} \\ \frac{\left(-MP_3 + P_1P_2\cos\theta_0\cos\beta_0 - MP_4 + P_1^2\cos^2\theta_0\right)k_{O_2}}{den} \end{bmatrix} x(t)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{P_4P_5 - P_3^2}{den} \\ \frac{P_1P_5\cos\theta_0 - P_2P_3\cos\beta_0}{den} \\ \frac{-P_1P_3\cos\theta_0 + P_2P_4\cos\beta_0}{den} \end{bmatrix} u(t)$$

avec $den = MP_4P_5 + 2P_1P_2P_3\cos(\theta_0)\cos(\beta_0) - P_2^2P_4\cos^2(\beta_0) - MP_3^2 - P_1^2P_5\cos^2(\theta_0)$.

Règle 8 : Si $\theta(t)$ est F_1^2 et $\beta(y)$ est F_2^2 et $\cos(\theta(t) - \beta(t))$ est F_3^2 alors la représentation d'état est :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(P_2P_3\cos\beta_0\cos(\theta_0+\beta_0) - P_1P_5\cos\theta_0)P_1g\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}}{den} & \frac{(-P_1P_3\cos\beta_0\cos(\theta_0+\beta_0) + P_2P_4\cos\beta_0)P_2g\frac{\sin\beta_0}{\beta_0}}{den} \\ 0 & \frac{\left(MP_5 - P_2^2\cos^2\beta_0\right)P_1g\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}}{den} & \frac{-(MP_3\cos(\theta_0+\beta_0) - P_1P_2\cos\theta_0\cos\beta_0)P_2g\frac{\sin\beta_0}{\beta_0}}{den} \\ 0 & \frac{-(MP_3\cos(\theta_0+\beta_0) - P_1P_2\cos\theta_0\cos\beta_0)P_1g\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}}{den} & \frac{\left(MP_4 - P_1^2\cos^2\theta_0\right)P_2g\frac{\sin\beta_0}{\beta_0}}{den} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-\left(P_4P_5 - P_3^2\cos^2(\theta_0+\beta_0)\right)f}{den} \\ \frac{-(P_1P_5\cos\theta_0 - P_2P_3\cos\beta_0\cos(\theta_0+\beta_0))f}{den} \\ \frac{-(-P_1P_3\cos\theta_0\cos(\theta_0+\beta_0) + P_2P_4\cos\beta_0)f}{den} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{(-P_1P_5\cos\theta_0 + P_2P_3\cos\beta_0\cos(\theta_0+\beta_0) - P_1P_3\cos\theta_0\cos(\theta_0+\beta_0) + P_2P_4\cos\beta_0)k_{O_2} + (-P_1P_5\cos\theta_0 + P_2P_3\cos\beta_0\cos(\theta_0+\beta_0))k_{O_1}}{den} \\ \frac{\left(-MP_5 + P_2^2\cos^2\beta_0 - MP_3\cos(\theta_0+\beta_0) + P_1P_2\cos\theta_0\cos\beta_0\right)k_{O_2} + \left(-MP_5 + P_2^2\cos^2\beta_0\right)k_{O_1}}{den} \\ \frac{\left(MP_3\cos(\theta_0+\beta_0) - P_1P_2\cos\theta_0\cos\beta_0 + MP_4 - P_1^2\cos^2\theta_0\right)k_{O_2} + (MP_3\cos(\theta_0+\beta_0) - P_1P_2\cos\theta_0\cos\beta_0)k_{O_1}}{den} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{(P_1P_5\cos\theta_0 - P_2P_3\cos\beta_0\cos(\theta_0+\beta_0) + P_1P_3\cos\theta_0\cos(\theta_0+\beta_0) - P_2P_4\cos\beta_0)k_{O_2}}{den} \\ \frac{\left(MP_5 - P_2^2\cos^2\beta_0 + MP_3\cos(\theta_0+\beta_0) - P_1P_2\cos\theta_0\cos\beta_0\right)k_{O_2}}{den} \\ \frac{\left(-MP_3\cos(\theta_0+\beta_0) + P_1P_2\cos\theta_0\cos\beta_0 - MP_4 + P_1^2\cos^2\theta_0\right)k_{O_2}}{den} \end{bmatrix} x(t)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{P_4P_5 - P_3^2\cos^2(\theta_0+\beta_0)}{den} \\ \frac{P_1P_5\cos\theta_0 - P_2P_3\cos\beta_0\cos(\theta_0+\beta_0)}{den} \\ \frac{-P_1P_3\cos\theta_0\cos(\theta_0+\beta_0) + P_2P_4\cos\beta_0}{den} \end{bmatrix} u(t)$$

avec $den = MP_4P_5 + 2P_1P_2P_3\cos(\theta_0)\cos(\beta_0)\cos(\theta_0+\beta_0) - P_2^2P_4\cos^2(\beta_0) - MP_3^2\cos(\theta_0+\beta_0) - P_1^2P_5\cos^2(\theta_0)$a

Pour toutes les règles du modèle flou :

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t),$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ \theta(t) \\ \beta(t) \\ \dot{X}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix},$$

et $M = M + m_1 + m_2$, $P_1 = (m_1 + 2m_2)\,l_1$, $P_2 = m_2l_2$, $P_3 = 2m_2l_1l_2$, $P_4 = (m_1 + 4m_2)\,l_1^2$ et $P_5 = m_2l_2^2$.